Université Paris 7 — 6 octobre 2001
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

51MT131 : Algèbre et analyse élémentaires, I

Résumé de cours[1] sur les nombres complexes

1. Règles de calcul

Un *nombre complexe* est un couple (a, b) de nombres réels. On note ce couple $z = a + bi$, où i est un symbole. Sa *partie réelle* est $\mathrm{Re}z = a$, et sa *partie imaginaire* est $\mathrm{Im}z = b$. La *somme* et le *produit* de deux nombres complexes sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i && (1)\\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i. && (2) \end{aligned}$$

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes muni de ces opérations. On vérifie les règles suivantes, valables pour trois nombres complexes z, z', z'' :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(z+z') = (\mathrm{Re}z) + (\mathrm{Re}z')\ , \quad \mathrm{Im}(z+z') = (\mathrm{Im}z) + (\mathrm{Im}z') && (3)\\ &z+z' = z'+z\ , \quad (z+z')+z'' = z+(z'+z'') && (4)\\ &zz' = z'z\ , \quad (zz')z'' = z(z'z'') && (5)\\ &z(z'+z'') = zz'+zz'' && (6) \end{aligned}$$

Par convention, si a est un nombre réel, on note simplement a le nombre complexe $a + 0i$. On vérifie les règles suivantes, valables pour un nombre complexe z et un nombre réel λ :

$$\begin{aligned} &z = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Re}z = 0 \text{ et } \mathrm{Im}z = 0) && (7)\\ &\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}z \quad , \quad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}z && (8)\\ &z+0 = z \quad , \quad 1z = z \quad , \quad 0z = 0. && (9) \end{aligned}$$

Pour un nombre complexe z, on pose $-z = -(\mathrm{Re}z) - (\mathrm{Im}z)i$. Si z et z' sont des nombres complexes, on pose $z' - z = z' + (-z)$. Par convention, on note i le nombre complexe $0 + 1i$. On a

$$i^2 = -1 \tag{10}$$

de façon que i est solution de l'équation $z^2 + 1 = 0$.

On montre que pour tout nombre complexe non nul z, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z'z = 1$. On pose $1/z = z'$. Si a, b sont des nombres réels tels que $a + bi$ est non nul, on a

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i. \tag{11}$$

On déduit de l'existence de $1/z$, $z \neq 0$, que pour tous les nombres complexes z_1, z_2, on a

$$z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 = 0 \quad \text{ou} \quad z_2 = 0). \tag{12}$$

Si z, z' sont des nombres complexes tels que z est non nul, on pose $z'/z = z'\,(1/z)$. Pour un nombre complexe z, on pose $z^0 = 1$ et pour tous entiers $n \geq 1$, on définit la *puissance n-ième de z* par $z^n = z\, z^{n-1}$. Pour tous les entiers p et n, on a

$$z^n\, z^p = z^{n+p} \text{ et } (z^n)^p = z^{np}. \tag{13}$$

On vérifie que pour $z \neq 1$, on a la formule pour la *somme géométrique*

$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \tag{14}$$

[1] Pour plus le détails, voir le chapitre 3 du livre de F. Liret et D. Martinais, *Cours de mathématiques, Algèbre 1re année*, Dunod, 1997

et que, pour tous les nombres complexes z_1, z_2 et tous les entiers $n \in \mathbb{N}$, on a la formule du *binôme de Newton*

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + C_n^1 z_1^{n-1} z_2 + \ldots + C_n^p z_1^{n-p} z_2^p + \ldots + z_2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z_1^{n-p} z_2^p. \tag{15}$$

2. Conjugué et module d'un nombre complexe, racine carrée

Soient a, b des nombres réels et $z = a + bi$. Le *conjugué* de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$. Le *module* de z est le nombre réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On vérifie les règles suivantes, valables pour des nombres complexes z_1, z_2, z (où $z \neq 0$ si $1/z$ apparaît)

$$\overline{\overline{z}} = z\,, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,, \quad \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}} \tag{16}$$

$$\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})\,, \quad \mathrm{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \tag{17}$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}\,, \quad z \in \mathbb{R}i \Leftrightarrow iz \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z \tag{18}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \quad |\,\frac{1}{z}\,| = \frac{1}{|z|}\,, \quad |\overline{z}| = |z|\,, \quad |z|^2 = z\overline{z} \tag{19}$$

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0\,, \quad z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,, \quad |z| = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \overline{z} \tag{20}$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2. \tag{21}$$

On démontre à l'aide de (21) que l'on a *l'inégalité triangulaire*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{22}$$

Les *racines carrées* d'un nombre complexe α sont les solutions complexes z de l'équation $z^2 = \alpha$. Tout nombre complexe non nul α admet exactement deux racines carrées opposées l'une de l'autre. Pour tous nombres réels x, y, a, b, on a

$$(x + iy)^2 = a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \tag{23}$$

et on trouve aisément les racines carrées de $a + ib$ en résolvant le système à droite. Soient α, β, γ des nombres complexes tels que $\alpha \neq 0$. Pour résoudre l'équation $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, on complète le carré et on détermine les racines carrées de $\beta^2 - 4\alpha\gamma$.

3. Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un unique nombre réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$z = |z|\,(\cos\theta \; + \; i \sin\theta). \tag{24}$$

On définit *l'argument de* z par $\mathrm{Arg} z = \theta$. Si α et β sont deux réels, on écrit $\alpha \equiv \beta \mod 2\pi$ si et seulement si il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \beta + 2\pi k$. Pour tous nombres complexes non nuls z_1 et z_2, on a

$$\mathrm{Arg}(z_1\, z_2) \equiv \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \mod 2\pi\,, \quad \mathrm{Arg}(1/z_1) \equiv -\mathrm{Arg}(z_1) \mod 2\pi. \tag{25}$$

Soit α un nombre complexe non nul et $n \geq 2$ un entier. Un nombre complexe z est une *racine n-ième de* α si $z^n = \alpha$. Le nombre z est une racine n-ième de α si et seulement si l'on a

$$|z| = \sqrt[n]{|\alpha|} \text{ et } \mathrm{Arg}(z) = \frac{\mathrm{Arg}\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \text{ pour un entier } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{26}$$

Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta} = cos\theta + i \sin\theta$. Alors les théorèmes d'additivité pour les fonctions trigonométriques donnent

$$e^{i\theta_1}\, e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \text{ et, par récurrence, } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Tout nombre complexe non nul z s'écrit $\rho e^{i\theta}$, et si $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$, alors $\rho = \rho' = |z|$ et $\theta \equiv \theta' \equiv \mathrm{Arg}(z) \mod 2\pi$.