Université Paris 7 — 1 décembre 2001
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

DEUG MASS Première année : MT 131

Examen partiel

Question de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1) Qu'est-ce qu'une base de E ?
2) Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E et v un vecteur de E. Qu'est-ce qu'on entend par les coordonnées de v dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$?
3) Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E, v un vecteur et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de v dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$. Supposons que $x_1 \neq 0$. Montrer que $(v, v_2, \ldots, v_n)$ est encore une base de E.

Exercice I

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$, soit F le sous-espace des solutions du système

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

et G le sous-espace des solutions du système

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1) Montrer que F et G sont de dimension 2. Montrer que leur intersection est réduite à $\{0\}$ et en déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
2) Exhiber une base v_1, v_2 de F et une base v_3, v_4 de G.
3) Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
   a) Quelle est la matrice de s dans la base $(v_1, \ldots, v_4)$?
   b) Quelle est la matrice de s dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$?

Exercice II

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 13 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1) Quels sont les vecteurs $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ de $\mathbb{R}^4$ tels que le système $Ax = y$ admet une solution $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ dans $\mathbb{R}^5$? Pour ces vecteurs y, quelle est la solution générale du système $Ax = y$?
2) Soit $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire qui, à $x \in \mathbb{R}^5$, associe Ax.
   a) Donner une base du noyau de f.

b) Donner une ou des équations qui caractérisent l'image de f. Quelle est la dimension de l'image ?

3) Soit $F \subset \mathbb{R}^4$ l'image de f. Donner une base de F. Existe-t-il une application linéaire $g : F \to \mathbb{R}^5$ telle que $f \circ g$ est l'identité de F ? Justifier.

Exercice III

Soient x_1, x_2, x_3 des nombres réels et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} .$$

Nous allons calculer le déterminant de A.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont nulles ou de degré ≤ 2. Dans E, on choisit la base formée des fonctions p_1, p_2, p_3 qui, à $x \in \mathbb{R}$, associent respectivement $1, x$ et x^2. Dans $\mathbb{R}^3$, on choisit la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit $f : E \to \mathbb{R}^3$ l'application qui, à $p \in E$, associe $(p(x_1), p(x_2), p(x_3))$.

1) Montrer que f est linéaire et que A est sa matrice dans les bases choisies de E et $\mathbb{R}^3$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$q_1(x) = 1\ ,\ q_2(x) = (x - x_1)\ ,\ q_3(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to E$ l'application linéaire qui envoie e_j sur q_j, $1 \leq j \leq 3$. Soit B la matrice de g dans les bases choisies. Montrer que B est triangulaire supérieure et calculer son déterminant.

3) Soit $C = (c_{ij})$ la matrice de $f \circ g$ dans les bases choisies. Calculer $(f \circ g)(e_j)$ pour $1 \leq j \leq 3$ et en déduire que $c_{ij} = q_j(x_i)$. Observer que C est triangulaire inférieure et calculer son déterminant.

4) Calculer le déterminant de A en utilisant le fait que $C = AB$.