Exercices sur les groupes.

Exercice 1. Soit G un ensemble muni d'une loi associative notée $\top$. On suppose qu'il existe un élément neutre à gauche e et que tout élément admet un inverse à gauche. Montrer que G est un groupe pour la loi $\top$.

Exercice 2. Montrer que le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A quel groupe est isomorphe le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

Exercice 3.- Montrer que H est un sous-groupe de G si et seulement s'il contient $x \top y'$ pour tout couple (x, y) d'éléments de H (y' désignant l'inverse de y dans G).

Exercice 4.- En remarquant que les coefficients binomiaux C_p^n sont divisibles par p pour tout entier n (compris entre 1 et $p-1$) lorsque p est premier, montrer que l'application qui à x associe x^p est un homomorphisme de groupe dans $\mathbb{F}_p$ (on verra peu après qu'il s'agit de l'identité !).

Exercice 5.- Soit G un groupe cyclique. Soit x un générateur de G . Montrer que si G n'est pas fini, il admet exactement deux générateurs (x et son inverse). Montrer que s'il est fini, les générateurs de G sont exactement les éléments de la forme x^h où h est premier avec l'ordre de x .

Exercice 6.- Utiliser l'exercice précédent pour donner tous les isomorphismes d'un groupe cyclique sur lui-même.

Exercice 7.- Soient G un groupe cyclique d'ordre n et H un groupe cyclique d'ordre m. Montrer que si m et n sont premiers entre eux, le groupe produit $G \times H$ est cyclique.

Exercice 8.- Soit G un groupe cyclique d'ordre n . Soit d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe d'ordre d dans G . Vérifier qu'il s'agit d'un groupe cyclique d'ordre d.

Exercice 9.- Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $E_n = \{1, ..., n\}$.

(a) Montrer qu'il est d'ordre $n!$

(b) Soient i et j deux éléments distincts de E_n. On note (i, j) la permutation qui laisse fixe les éléments de E_n différents de i et j et échange ces deux entiers. Une telle permutation s'appelle une **transposition**. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par l'ensemble des transpositions de $\mathfrak{S}_n$.

(c) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par l'ensemble des transpositions τ_i de la forme $(i, i+1)$ lorsque i décrit $E_n \setminus \{n\}$.

(d) Montrer que ces transpositions vérifient $\tau_i^2 = e$, $(\tau_i\tau_j)^2 = e$ si i et j ne sont pas consécutifs et $(\tau_i\tau_j)^3 = e$ sinon.

Exercice 10. Montrer à l'aide de l'exercice précédent que $\mathfrak{S}_n$ peut être engendré par la transposition $(1,2)$ et la permutation circulaire $(1 \cdots n)$.

Exercice 11.- On considère toujours le groupe $\mathfrak{S}_n$. Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. Soit (i,j) un couple d'éléments de $E_n = \{1, ..., n\}$ (avec $i < j$). On dira que le couple (i,j) présente une inversion pour σ si $\sigma(i)$ est strictement supérieur à $\sigma(j)$. On note $\nu(\sigma)$ le nombre de telles inversions. On note enfin $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\nu(\sigma)}$.

(a) Montrer directement que ε définit un homomorphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$.

(b) Si σ est le produit de n transpositions, montrer que n a la même parité que $\nu(\sigma)$. On pourra procéder par récurrence sur le nombre d'inversions de σ en remarquant que si (i,j) présente une inversion pour σ, le nombre d'inversions de $\sigma \circ (i,j)$ est inférieur d'une unité à celui de σ.

(c) Utiliser le résultat de (b) pour retrouver (a) . On note $\mathfrak{A}_n$ le noyau de ε. Ce sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ s'appelle le **groupe alterné**.

Exercice 12.- Dresser la table du groupe $\mathfrak{S}_3$ (si ce n'est déjà fait car c'est le seul groupe non abélien d'ordre 6). En trouver tous les sous-groupes.

Exercice 13.- Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est produit de permutations circulaires portant sur des parties disjointes de $\{1, ..., n\}$. On appelle de telles permutations des **cycles**. On pourra considérer la relation d'équivalence entre les entiers i et j donnée par i équivaut à j si et seulement s'il existe k tel que $j = \sigma^k(i)$. Vérifier que de telles permutations commutent entre elles.

Exercice 14.- Soit $\mathfrak{A}_n$ le groupe alterné d'ordre n. Montrer qu'il est engendré par les permutations $(1,2,i)$ où i décrit $\{3, ..., n\}$. On pourra remarquer que les permutations de la forme $(1,2)(i,j)$ ou $(i,j)(1,2)$ sont engendrées par les précédentes.

Exercice 15.- Dresser la table du groupe $\mathfrak{A}_4$. En particulier en trouver tous les sous-groupes et tous les sous-groupes distingués.

Exercice 16. (Il utilise beaucoup de résultats des exercices précédents qui concernent $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$) Soit H un sous-groupe distingué (non réduit au neutre) dans $\mathfrak{A}_n$. Il s'agit de montrer que H est égal à $\mathfrak{A}_n$ si n est au moins égal à 5 . On dit que $\mathfrak{A}_n$ est simple.

(i) Montrer que si H contient un cycle (voir l'exercice 13) de longueur 3 et que n est plus grand que 3, alors $H = \mathfrak{A}_n$.

(ii) Montrer que si H contient un produit de 2 transpositions (voir l'exercice 9) et que n est plus grand que 3, alors $H = \mathfrak{A}_n$.

(iii) Soit h un élément quelconque de H (mais différent du neutre). On l'écrit comme produit de cycles de longueur décroissante (voir l'exercice 13). Soit $h = h_1 h_2 \cdots h_r$. En distinguant les quatre cas suivants :

a) les h_i sont des transpositions,

b) les h_i sont des transpositions sauf h_1 qui est un cycle de longueur 3,

c) h_1 et h_2 sont des cycles de longueur 3,

d) h_1 est un cycle de longueur strictement plus grande que 3,
montrer que l'on se ramène soit au cas (i) soit au cas (ii) c'est à dire que H contient soit un cycle de longueur 3 soit un produit de deux transpositions.

Exercice 17. Montrer que tous les groupes d'ordre au plus 5 sont abéliens.

Exercice 18. Dresser la liste des groupes d'ordre au plus 5 .

Exercice 19. Dresser la liste des groupes d'ordre au plus 10. Montrer en particulier qu'il y a deux groupes non abéliens non isomorphes d'ordre 8 .

Exercice 20. Montrer que tous les éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont d'ordre fini pour l'addition. Montrer qu'il existe exactement un sous-groupe d'ordre n dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ pour chaque entier naturel n.

Exercice 21. Soit G un groupe. On note C l'ensemble des éléments de G qui commutent à tous les éléments de G . Montrer que C est un sous-groupe distingué de G . On appelle centre de G ce sous-groupe C.

Exercice 22. Soit G un groupe. On suppose que le groupe G/C est cyclique. Montrer que G est abélien.

Exercice 23. Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe propre de G. Montrer que G n'est pas la réunion des conjugués de H (rappelons que l'on appelle conjugué de H tout sous-groupe de la forme xHx^{-1} où x est un élément de G).

Exercice 24. Soit G un groupe et A une partie de G . On appelle centralisateur de A dans G l'ensemble des g de G qui commutent aux éléments de A. On note $Z_G(A)$ cet ensemble. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de G .

Exercice 25. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On appelle normalisateur de H dans G l'ensemble des g de G tels que l'ensemble des gHg^{-1} soit égal à H . On note $N_G(H)$ cet ensemble. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de G qui contient H . Montrer que $G = N_G(H)$ si H est distingué dans G .

On suppose que G est fini d'ordre pq où p et q sont des nombres premiers. Montrer que si H n'est pas distingué, alors $H = N_G(H)$.

Exercice 26.- Soit G un groupe. On appelle commutateur tout élément de g de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ (x et y étant des éléments quelconques de G). Soit G' les sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs d'éléments de G. Montrer que G' est un sous-groupe distingué de G . Montrer que le groupe quotient G/G' est abélien.

Les exercices suivants nécessitent la notion de groupe de Sylow ou celle d'opération de groupe (équation aux classes) ou les deux à la fois !

Exercice 27. Montrer que tous les groupes d'ordre 15 sont cycliques.

Exercice 28. Montrer qu'aucun groupe G d'ordre 30, 204 ou 206 n'est simple (i.e. qu'il admet au moins un sous-groupe distingué propre).

Exercice 29. Trouver les 2-Sylow et les 3-Sylow de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 30. Soit G un groupe d'ordre p^a où a est un entier au moins égal à 1. En utilisant l'équation aux classes montrer que le centre Z de G n'est pas réduit à l'élément neutre.

Exercice 31. Soit p un nombre premier. Montrer que tous les groupes d'ordre p^2 sont abéliens. Les trouver tous.

Exercice 32. Soit p un nombre premier. Soit G un groupe d'ordre p^3. On suppose que G n'est pas abélien.

(i) Montrer que le centre Z de G est cyclique d'ordre p . Montrer que le groupe G/Z est isomorphe à $Z \times Z$.

(ii) Soit H un sous-groupe d'ordre p^2 de G . Montrer que H contient Z et qu'il est distingué dans G .

(iii) Si tout élément x de G vérifie $x^p = 1$, montrer que G admet un sous-groupe d'ordre p^2.