MT 282 Université Paris 7
03/11/94 U.F.R. de Mathématiques
B. Keller

Exercices sur les sommes de groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

1) Montrer que les groupes $A = \mathbf{Z}/24 \oplus \mathbf{Z}/5$ et $B = \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/15$ sont isomorphes. Expliciter des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre A et B.

2) Montrer directement que

   a) $\mathbf{Z}/4$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z}/9$.

   b) $\mathbf{Z}/4$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$.

3) Soient les groupes suivants

$$\begin{aligned}
A &= \mathbf{Z}/5 \oplus \mathbf{Z}/550 \oplus \mathbf{Z}/121000 \\
B &= \mathbf{Z}/168 \oplus \mathbf{Z}/36 \oplus \mathbf{Z}/2 \\
C &= \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/12 \oplus \mathbf{Z}/126 \\
D &= \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/125 \oplus \mathbf{Z}/25 \oplus \mathbf{Z}/5 \oplus \mathbf{Z}/121 \oplus \mathbf{Z}/11
\end{aligned}$$

   a) Déterminer tous les couples de groupes isomorphes parmi $A, \ldots, D$.

   b) Pour tout $G \in \{A, \ldots, D\}$, calculer une suite d'entiers $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ telle que G soit isomorphe à la somme $\mathbf{Z}/n_1 \oplus \mathbf{Z}/n_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}/n_k$ et que n_i divise n_{i+1} pour tout $i < k$. Est-ce qu'une telle suite est unique ?

4) a) Quel est le sous-groupe de 12-torsion T de $\mathbf{Z}/28\mathbf{Z}$? Déterminer $k \in \mathbf{Z}$ tel que T soit isomorphe à $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

   b) Soient n et m des entiers ≥ 2. Montrer que le sous-groupe de m-torsion de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ où $l = \mathrm{PGCD}\ (n, m)$.

5) Soit le système

$$\begin{aligned}
x &\equiv a_1\ (6) \\
x &\equiv a_2\ (27) \\
x &\equiv a_3\ (36)
\end{aligned}$$

   où $x, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Z}$.

   a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a_1, a_2, a_3 pour que le système admette une solution $x \in \mathbf{Z}$. Si une solution existe, dans quelle mesure est-elle unique ?

   b) Déterminer l'image et le noyau de l'homomorphisme

$$f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/6 \oplus \mathbf{Z}/27 \oplus \mathbf{Z}/36\ ,\ x \mapsto ({}^{6}\overline{x},\ {}^{27}\overline{x},\ {}^{36}\overline{x}).$$

   Y a-t-il un lien avec a) ? (Rappelons que le *noyau* d'un morphisme $f : A \to B$ entre groupes abéliens est le sous-groupe formé des $a \in A$ tels que $f(a) = 0$.)

Pour résoudre les exercices suivants, on admettra le théorème qui affirme que tout groupe abélien fini est somme de groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

6) Soit p un nombre premier. Quels sont, à isomorphisme près, les p-groupes abéliens d'ordre p^n pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5 ? (Rappelons qu'un p-groupe est un groupe dont l'ordre est une puissance de p. On pourra se servir des diagrammes de Young à n cases.)

7) Soient p un nombre premier et A un p-groupe abélien fini. Montrer que A est cyclique (c'est-à-dire isomorphe à $\mathbf{Z}/p^n$ pour un $n \geq 1$) si et seulement si son sous-groupe de p-torsion $A_p = \{a \in A \mid pa = 0\}$ est d'ordre p.

8) Soit p un nombre premier et A un p-groupe abélien fini. Montrer que A n'est pas isomorphe à un groupe de la forme $\mathbf{Z}/p \oplus R$ si et seulement si on a

$$\forall\, a \in A : pa = 0 \Rightarrow \exists b \in A \text{ t.q. } a = pb.$$

9) Montrer que si A est un groupe abélien fini d'ordre n qui n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z}/n$, alors il existe un diviseur m de n différent de n et tel que $ma = 0$ pour tout $a \in A$.

10) Montrer que pour tout groupe abélien fini A il existe une suite $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ d'entiers ≥ 2 et une seule telle que A soit isomorphe à la somme des groupes $\mathbf{Z}/n_i$ et que n_i divise n_{i+1} pour tout $i < k$. (Voir l'exercice 3 b).