Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques

1 février, 1995
B. Keller

D.E.U.G. Mathématiques : MT 282

EXAMEN

Avertissement : Les documents autres que la table des indices sont interdits.

1) De combien de dents (au moins) faut-il faire avancer la grande roue dans l'engrenage suivant pour que la marque (M) de la grande roue se trouve en position 1, celle de la roue à droite en position 1 et celle de la roue à gauche en position 2 ? (La grande roue a 25 dents, celle de droite en a 8, et celle de gauche 9.)

2) Déterminer tous les couples de groupes isomorphes parmi

$$A = \mathbf{Z}/14 \oplus \mathbf{Z}/12 \oplus \mathbf{Z}/72\,,\; B = \mathbf{Z}/6 \oplus \mathbf{Z}/28 \oplus \mathbf{Z}/72\,,\; C = \mathbf{Z}/6 \oplus \mathbf{Z}/36 \oplus \mathbf{Z}/56.$$

3) Soit G un groupe et soient H et K deux sous-groupes de G. Montrer que, si H est distingué dans G, alors l'ensemble des produits hk, où $h \in H$ et $k \in K$, est un sous-groupe de G.

4) Notons ϕ l'indicatrice d'Euler. Soit G un groupe d'ordre n qui contient au plus $\phi(d)$ éléments d'ordre d pour tout diviseur d de n tel que $d < n$. Montrer que G est cyclique.

5) Calculer le *reste* r de la division euclidienne de a par b dans les cas suivants:

a) $a = 1234565789012345\,,\; b = 11$
b) $a = 2000^{2000}\,,\; b = 7$
c) $a = 53^{101}\,,\; b = 101$
d) $a = 5^{512}\,,\; b = 1024$
e) $a = 24^{24}\,,\; b = 23^2$
f) $a = 3^{(5^9)}\,,\; b = 17$

6) Résoudre les équations $x^4 = 1$ et $x^3 = 11$ dans $\mathbf{Z}/53\mathbf{Z}$.

7) On considère le nombre $M = 13^{13} - 1 = 3028751065992252$.

   a) Montrer, sans calculs explicites, que M est divisible par $12 = 13 - 1$.

   b) Montrer qu'un diviseur premier de M qui ne divise pas 12 est congru à 1 modulo 26.

   c) Utiliser les points précédents (et la table des indices) pour déterminer tous les diviseurs premiers inférieurs à 100 de M.

8) a) Décomposer le nombre $\alpha = -2 + 16i$ en un produit d'éléments premiers dans l'anneau des entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$.

   b) Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. Montrer que les seules solutions $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ de l'équation

$$x^2 + y^2 = p^2$$

   sont $(\pm p, 0)$ et $(0, \pm p)$. Indication : Si (x, y) est une solution, on pourra considérer la décomposition en facteurs premiers de l'entier de Gauss $x + iy$.