B. Keller

Examen

Avertissement : Les documents sont interdits. Les calculettes sont autorisées.

1) Pour sa retraite, les amies de Miss M. lui ont offert les œuvres complètes d'Edgar Alan Poe. Profondément touchée elle remercie chacune d'elles par écrit. Cette tâche achevée, il lui reste 11 cartes, 5 enveloppes et 12 timbres. Combien a-t-elle d'amies sachant qu'en Angleterre les cartes sont vendues par blocs de 12, les enveloppes par paquets de 13 et les timbres par feuilles de 17 ? (Remarquons aussi que Miss M. met une seule carte dans chaque enveloppe et que le nombre de ses amies ne dépasse pas mille).

2) Calculer le reste r de la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants

   a) $a = \underbrace{11\ldots11}_{\text{300 chiffres}}$ (écriture dans le système hexadécimal), $b = 13$,
   b) $a = 113^{540}$, $b = 541$,
   c) $a = 1000^{1452}$, $b = 23 \times 67$,
   d) $a = 2^{(17^{12})}$, $b = 12871 (= 61 \times 211)$.

3) Soit G le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/675\mathbf{Z}$.

   a) Quel est l'ordre maximal d'un élément de G ?
   b) Exhiber un élément d'ordre maximal dans G.

4) Rappeler la définition du symbole de Legendre $(\frac{p}{q})$ et le calculer dans les cas suivants

   a) $p = 71$, $q = 113$,
   b) $p = 173$, $q = 229$.

5) Soit a_n, $n \in \mathbf{N}$, la *suite de Fibonacci* définie par

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \ , \quad \text{pour } n \geq 0. \end{aligned}$$

   a) Calculer a_n pour $0 \leq n \leq 20$.
   b) Montrer qu'on a
   $$a_n = 3 \times (8^n - 4^n) \text{ dans } \mathbf{Z}/11\mathbf{Z}.$$
   Indication : on a $8^2 = 8 + 1$ et $4^2 = 4 + 1$ dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$.
   c) Montrer que a_n est divisible par 11 si et seulement si n est divisible par 10.
   d) Soit p un nombre premier congru à ± 1 modulo 5. Montrer que l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions distinctes x_1, x_2 dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
   e) Avec les hypothèses et les notations de d), montrer que le système
   $$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 &= 1 \end{aligned}$$
   admet une solution (c_1, c_2) dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$. Montrer que pour cette solution, on a
   $$a_n \equiv c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \text{ dans } \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}.$$
   f) Soit p un nombre premier congru à ± 1 modulo 5. Montrer que a_n est divisible par p si n est divisible par $p - 1$.