Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
B. Keller

Examen de Janvier 1997

Avertissement : les calculettes sont autorisées.

1) Alice adore les chansons de D.B. . Elle s'est procuré le très long texte de la dernière sur disquette. Avant d'imprimer le fichier, elle le prévisualise et constate qu'en mettant 40 lignes par page elle obtiendra une seule ligne sur la dernière page. Elle diminue le nombre de lignes par page à 37 ce qui résulte en une dernière page remplie de 13 lignes. Superstitieuse, elle finit par imprimer le fichier à 43 lignes par page en remplissant les 11 lignes libres de la dernière avec une superbe photo de D.B. en concert à Bercy.

   Combien de lignes comporte (au moins) la dernière chanson de D.B. ? (Question facultative : quel est le vrai nom de D.B. ?)

2) Déterminer le *reste* r de la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

   a) $a = 1995^{456}$, $b = 229$,
   b) $a = 1996^{1233}$, $b = 2001$,
   c) $a = 10^{(101^{1000})}$, $b = 31$,
   d) $a = 13^{60}$, $b = 385$.

3) Déterminer l'ordre et l'exposant de chacun des groupes suivants. Lesquels de ces groupes sont cycliques ?

$$A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}\ ,\ B = (\mathbf{Z}/23\mathbf{Z})^*\ ,\ C = (\mathbf{Z}/22\mathbf{Z})^*\ ,\ D = (\mathbf{F}_3[X], +)\ ,$$

$$E = \mathbf{F}_5[X]^*\ ,\ F = (\mathbf{F}_5[X]/(X^2+1))^*\ ,\ G = (\mathbf{F}_7[X]/(X^2+1))^*.$$

4) Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 12 & 10 & 11 & 3 & 13 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Déterminer la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints, son ordre et sa signature.
   b) Montrer qu'il existe deux transpositions τ_1 et τ_2 telles que $\tau_1\tau_2\sigma$ soit d'ordre 13.
   c) Montrer que $\tau\sigma$ n'est jamais d'ordre 13 quelle que soit la transposition τ.

5) Soit a_n, $n \in \mathbf{N}$ la suite de Fibonacci (c'est-à-dire que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pour $n \in \mathbf{N}$). Soient λ_1, λ_2 les deux racines du polynôme $X^2 - X - 1$.

a) Montrer que

$$a_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

pour $n \in \mathbf{N}$ et que

$$\frac{a_{rs}}{a_r} = \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_1^{ri} \lambda_2^{r(s-1-i)}$$

pour $r, s > 0$.

b) Montrer que pour les lois naturelles, l'ensemble

$$A = \{k\lambda_1 + l \mid \ k, l \in \mathbf{Z}\ \}$$

est un anneau et que a_{rs}/a_r appartient à A quels que soient $r, s > 0$.

c) Montrer que pour $a \in A$, l'écriture

$$a = k\lambda_1 + l$$

est unique. En déduire qu'il existe une application bien définie

$$\gamma : A \to A\,,\ k\lambda_1 + l \mapsto k\lambda_2 + l.$$

Montrer que γ est un homomorphisme d'anneaux.

d) Montrer que $a \in A$ appartient à $\mathbf{Z}$ si et seulement si $\gamma(a) = a$.

e) Montrer que pour $r, s > 0$, a_{rs} est divisible par a_r.

f) Montrer que si a_n est un nombre premier > 3, alors n est premier.