Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques

5 septembre, 1995
B. Keller

# D.E.U.G. Mathématiques : MT 282

## EXAMEN

**Avertissement** : Les documents sont interdits.

1) En préparant une salle d'examen qui contient 150 personnes au maximum un appariteur calcule que s'il met 5 sujets par rangée, il reste 3 à la dernière rangée; s'il en met 6, il reste 3 aussi; et s'il met 7, il reste 4. Combien de candidats participeront à l'épreuve ?

2) Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$. Montrer que $H$ est distingué dans $G$ si et seulement si pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que $xH = Hx'$.

3) Calculer le *reste* $r$ de la division euclidienne de $a$ par $b$ dans les cas suivants:

   a) $a = 11111001011$ (écriture dans le système binaire !), $b = 7$
   b) $a = 23^{47}$ , $b = 47$
   c) $a = 17^{13}$ , $b = 36$
   d) $a = 191^{(141^{128})}$ , $b = 495$

4) Soit $n > 1$ un entier. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

   (i) $n$ est premier
   (ii) il existe un entier $a$ tel que $a^{n-1} \equiv 1\ (n)$ et $a^{(n-1)/q} \not\equiv 1\ (n)$ pour tout facteur premier $q$ de $n-1$.

5) Soit $n \geq 1$ un entier.

   a) Soit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ une solution de l'équation
   $$x^2 + y^2 = 5^n.$$
   Déterminer la forme de la décomposition en facteurs premiers dans $\mathbf{Z}[i]$ du nombre $x + iy$.
   b) Montrer que le nombre de solutions $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ de l'équation $x^2 + y^2 = 5^n$ est borné par $4(n+1)$.

6) a) Soit $p$ un nombre premier impair et $m \geq 1$ un entier. Déterminer toutes les solutions $x \in \mathbf{Z}$ de l'équation $x^2 \equiv 1\,(p^m)$.
   b) Soit $n > 1$ un entier impair. Combien y a-t-il de racines modulo $n$ de l'équation $x^2 = 1$ ? Quels sont les entiers impairs $n$ pour lesquels il y a exactement 2 solutions ?
   c) (facultatif) Répondre aux questions de b) dans le cas d'un entier $n \geq 1$ quelconque.