MT 282 Université Paris 7
11/09/96 U.F.R. de Mathématiques
B. Keller

Examen

Avertissement : Les documents sont interdits. Les calculettes sont autorisées.

1) Pour son dixième anniversaire, Jean reçoit un chèque d'un montant considérable de la part de sa tante Emilie. S'il dépensait la somme pour acheter des cartes magiques (29 francs le paquet), il lui resterait 15 francs; s'il investissait sa fortune pour acheter des cartouches pour son 'Game Boy' (99 francs la cartouche), il lui resterait 11 francs. Finalement, il se décide à utiliser l'argent pour compléter sa collection des aventures de Tintin (79 francs l'album) et il lui reste 53 francs. Quel était le montant du chèque ? (Remarquons que tante Emilie est généreuse mais raisonnable : elle ne n'offrirait jamais un chèque de plus de 100000 francs à un garçon de dix ans).

2) Calculer le reste r de la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants

   a) $a = \underbrace{311311\ldots311}_{3n \text{ chiffres}}$, $b = 7$,
   b) $a = 541^{862}$, $b = 863$,
   c) $a = 19^{80}$, $b = 561$,
   d) $a = 2^{a'}$, $b = 13$, où $a' = 5^{(7^{11})}$.

3) Soit p un nombre premier et a et b deux entiers tels que $a \not\equiv 0\ (p)$. Soit x_n, $n \in \mathbf{N}$, la suite définie par

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_{n+1} &= a\,x_n + b\ ,\ n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

   a) Supposons que $a \not\equiv 1\ (p)$. Montrer que p divise x_n si n est un multiple de $p-1$. Qu'arrive-t-il si $a \equiv 1\ (p)$?
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que p divise x_n. (On aura à distinguer plusieurs cas).

4) Soit p un nombre premier impair. Supposons que l'équation

$$x^2 + y^2 = pz^2 \qquad (*)$$

admet des solutions $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ non-triviales (i.e. différentes de $(0, 0, 0)$). Il s'agit de montrer que $p \equiv 1\ (4)$.

   a) Supposons que (x, y, z) est une solution non-triviale telle que p divise y. Montrer que p divise x et z et que $(x/p, y/p, z/p)$ est encore une solution. En déduire qu'il existe des solutions non-triviales (x, y, z) telles que p ne divise pas y.
   b) Déduire de a) que la congruence $u^2 + 1 \equiv 0\ (p)$ admet une solution $u \in \mathbf{Z}$.
   c) Conclure.

5) a) Soit p un nombre premier impair et a un nombre entier non divisible par p. Enoncer et démontrer une condition nécessaire pour que l'équation $x^2 - ay^2 = pz^2$ admette des solutions non triviales $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$.
   b) Montrer que l'équation $x^2 - 7y^2 = pz^2$ ne peut admettre de solutions non triviales $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ que si le reste de p modulo 28 est congru à $1, \pm 3, \pm 9$ ou 13.