Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
B. Keller

Deuxième examen partiel[1]

1) Résoudre le système

$$\begin{aligned} x &\equiv 11 \ (13) \\ x &\equiv 5 \ (15) \\ x &\equiv 11 \ (17). \end{aligned}$$

2) a) Pour quelles valeurs des paramètres entiers a, b le système suivant admet-il une solution ?

$$\begin{aligned} x &\equiv a \ (15) \\ x &\equiv b \ (35) \end{aligned}$$

b) Déterminer la solution pour ces valeurs.

3) Calculer le reste r de la division euclidienne de a par b dans les cas suivants

a) $a = \underbrace{11\ldots11}_{\text{1000 chiffres}}$ (écriture dans le systèm binaire), $b = 17$,

b) $a = 2001^{112}$, $b = 113$,

c) $a = 243^{289}$, $b = 323$,

d) $a = 80^{206}$, $b = 325$.

4) On définit la *fonction de Möbius* $\mu : \mathbf{N}^* \to \{0, 1, -1\}$ par

$$\begin{aligned} \mu(1) &= 1\,, \\ \mu(n) &= 0 \text{ si } n \text{ contient un facteur carré,} \\ \mu(p_1 p_2 \ldots p_r) &= (-1)^r \text{ si les } p_i \text{ sont des nombres premiers distincts.} \end{aligned}$$

a) Montrer que la fonction μ est multiplicative, i.e. si r et s sont des entiers positifs premiers entre eux, alors $\mu(rs) = \mu(r)\,\mu(s)$.

b) Soit $n > 1$ un entier. Montrer qu'on a

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

(où d parcourt les diviseurs positifs de n). *Avertissement* : Dans un premier temps, admettez ce résultat et procédez.

c) Soit $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{Z}$ une fonction. On pose

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Montrer qu'on a

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\, g(d).$$

d) En déduire la formule

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\, d.$$

[1] Uniquement pour les candidats qui étaient empêchés de participer au partiel de décembre 95 à cause de la situation dans les transports