MT 282
03/12/94

Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
B. Keller

Examen partiel

1) Pour aller du centre de ville vers l'aéroport, on peut prendre le métro, le RER ou le bus. Ces moyens de transport circulent 24 heures sur 24 avec des intervalles de 5' pour le métro, 9' pour le RER, et 32' pour le bus. A midi, le métro, le bus et le RER partent en même temps. Assis à une terrasse de café, le dernier numéro de la Gazette des mathématiciens entre les mains, un voyageur constate que le prochain métro part dans trois minutes, le RER dans six minutes et le bus dans 31 minutes. A quelle heure part le prochain métro ?

2) Soient ρ et τ les éléments suivants du groupe symétrique S_3

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble des entiers l tels que $\rho^l = \tau^l$.

3) a) Déterminer tous les couples de groupes isomorphes parmi

$$A = \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/15\,,\ B = \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/15\,,\ C = \mathbf{Z}/6 \oplus \mathbf{Z}/20\,,\ D = \mathbf{Z}/3 \oplus \mathbf{Z}/20.$$

b) (facultatif) Déterminer tous les entiers $a, b \geq 2$ tels que $\mathbf{Z}/15 \oplus \mathbf{Z}/a$ soit isomorphe à $\mathbf{Z}/20 \oplus \mathbf{Z}/b$.

4) a) Déterminer l'ordre de 2 et de 3 dans le groupe $(\mathbf{Z}/31\mathbf{Z})^*$. Ce groupe, est-il cyclique ?

b) Résoudre l'équation $x^3 = 1$ dans $\mathbf{Z}/31\mathbf{Z}$.

5) a) Soient a un entier tel que PGCD$(a, 10) = 1$ et PGCD$(a, 3)$=1. Soit c l'ordre de 10 dans $(\mathbf{Z}/a\mathbf{Z})^*$. Montrer que a divise le nombre dont l'écriture décimale est

$$\underbrace{11\ldots111}_{c}.$$

b) Sous les hypothèses de a), donner une condition nécessaire et suffisante sur l'entier $l \geq 1$ pour que a divise le nombre

$$\underbrace{11\ldots111}_{l}.$$

6) a) Représenter graphiquement la partie C du plan $\mathbf{R}^2$ donnée par l'équation

$$x^2 - y^2 = 1.$$

b) Montrer que C contient une infinité de points rationnels (i.e. de points (x, y) tels que $x \in \mathbf{Q}$ et $y \in \mathbf{Q}$). Indication : on pourra considérer l'intersection de C avec la droite d'équation $y = t(x-1)$, où $t \in \mathbf{Q}$ est un paramètre. Marquer la droite dans l'esquisse de a).

c) Etablir une bijection entre l'ensemble C^+ des points rationnels (x, y) de C tels que $x > 0$ et $y > 0$ et l'ensemble $\mathbf{Q}_{>1}$ des nombres rationnnels strictement plus grand que 1.

d) Montrer que pour tout point rationnel (x, y) de C avec $x > 0$ et $y > 0$ il existe des entiers $u > v \geq 1$ premiers entre eux et tels que

$$x = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}\,, \qquad y = \frac{2uv}{u^2 - v^2}.$$