MT 282 Université Paris 7
03/12/95 U.F.R. de Mathématiques
B. Keller

Examen partiel

Avertissement : les calculettes sont autorisées. Les documents autres que le résumé de cours distribué pendant l'épreuve sont interdits.

1) Le petit Jean collectionne les pistolets à eau. Il en a déjà un bon nombre : s'il en donnait 7 à chacun de ses amis (ce qu'il n'a pas l'intention de faire), il lui en resterait 9. Par contre, s'il voulait en donner 9 à chacun, il lui en manquerait 1 pour le dernier. Sachant que Jean range ses pistolets à eau tous les soirs dans des boîtes de 8 dont la dernière est remplie à moitié, combien de pistolets à eau possède Jean et combien a-t-il d'amis ? (Il en a moins de 100 ...)

2) Déterminer le *reste* r de la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

   a) $a = AAAAAABBBBBB$ (écriture hexadécimale), $b = 7$,
   b) $a = 19^{330}$, $b = 31$,
   c) $a = 532^{2160}$, $b = 2025$,
   d) $a = 217^{18}$, $b = 437$.

3) Soit n un entier ≥ 2 et p un nombre premier. Montrer qu'on a

$$\phi(p\,n) = \begin{cases} p\,\phi(n) & \text{si } p \text{ divise } n \\ (p-1)\,\phi(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

où ϕ désigne l'indicatrice d'Euler.

4) a) Déterminer toutes les classes $\overline{c}$ modulo 75 pour lesquelles le système suivant admet une solution.

$$\begin{aligned} x &\equiv c\,(75) \\ x &\equiv 6\,(45) \end{aligned}$$

   b) Déterminer la solution du système pour les classes trouvées dans a).

5) Pour un entier $n \geq 1$ soit $D(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n et soit

$$\sigma(n) = \sum_{d \in D(n)} d.$$

   a) Calculer $\sigma(n)$ pour $1 \leq n \leq 10$.
   b) Si p est un nombre premier et k un entier ≥ 1 montrer que

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}.$$

   c) Soient r et s deux entiers ≥ 2 et qui sont premiers entre eux. Montrer que l'application

$$\psi : D(r) \times D(s) \longrightarrow D(rs)\ ,\ (d, e) \mapsto de$$

   est bijective. Indication : considérer les décompositions de r et s en produits de puissances de nombres premiers.

   d) Soient r et s deux entiers ≥ 2 et qui sont premiers entre eux. Montrer qu'on a

$$\sigma(r)\sigma(s) = \sigma(rs).$$