

D.E.U.G. Mathématiques : MT 282

TEST N° 3

Groupe de TD (indiquer le jour de la semaine) :

NOM :

Prénom :

- 1) Soient A, B des anneaux commutatifs et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que l'application induite

$$\bar{f} : A/\ker f \rightarrow B, \bar{a} \mapsto f(a)$$

est injective.

- 2) a) Le polynôme $X^2 + X + 1$ est-il réductible sur \mathbf{F}_2 ? Quel est le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $A = \mathbf{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$? Le groupe A^* est-il cyclique ?
b) Mêmes questions pour le polynôme $X^2 + 1$ sur \mathbf{F}_{17} et l'anneau

$$B = \mathbf{F}_{17}[X]/(X^2 + 1).$$

- 3) Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que le polynôme $X^2 + X + 1$ est réductible sur \mathbf{F}_p si p est congru à 1 modulo 3. Indication : considérer le polynôme $(X - 1)(X^2 + X + 1)$.