Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques

9 janvier 1997
B. Keller

D.E.U.G. Mathématiques : MT 282

TEST N° 3

Groupe de TD (indiquer le jour de la semaine) :

NOM :

Prénom :

1) Soient A, B des anneaux commutatifs et $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que l'application induite

$$\overline{f} : A/\ker f \to B\ ,\ \overline{a} \mapsto f(a)$$

est injective.

2) a) Le polynôme $X^2 + X + 1$ est-il réductible sur $\mathbf{F}_2$? Quel est le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $A = \mathbf{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$? Le groupe A^* est-il cyclique ?

b) Mêmes questions pour le polynôme $X^2 + 1$ sur $\mathbf{F}_{17}$ et l'anneau

$$B = \mathbf{F}_{17}[X]/(X^2 + 1).$$

3) Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que le polynôme $X^2 + X + 1$ est réductible sur $\mathbf{F}_p$ si p est congru à 1 modulo 3. Indication : considérer le polynôme $(X - 1)(X^2 + X + 1)$.