Université Paris 7 – Denis Diderot 2001–02
UFR de Mathématiques, Second Cycle MT 401 (B. Keller)

DEVOIR

A rendre la semaine du 29 avril

1) Soit A un anneau, $n \geq 1$ un entier et $L = A^n$. A toute matrice carrée $B = (b_{ij})$ de taille $n \times n$ à coefficients dans B, on associe l'application A-linéaire $f_B : L \to L$ telle que si $y = f_B(x)$ alors
$$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \ , \ i = 1, \ldots, n.$$
Montrer qu'on a équivalence entre
   i) l'homomorphisme f_B est inversible
   ii) l'élément $detB$ est inversible dans A
   iii) les vecteurs colonnes de B forment une base de L.

   (Indication : Montrer d'abord l'équivalence entre i) et iii). Montrer ensuite l'équivalence entre i) et ii). On pourra se servir de l'identité $B\tilde{B} = (\det B) I_n$, où $\tilde{B}$ désigne la transposée de la matrice des cofacteurs de B et I_n la matrice identité.)

   Montrer que les matrices B vérifiant ces conditions forment un groupe pour la multiplication des matrices. On note $\mathrm{GL}(n, A)$ ce groupe.

2) a) Exhiber toutes les bases de $\mathbf{Z}^2$ dont le premier vecteur appartient au sous-module engendré par
$$\begin{bmatrix} 1994 \\ 1995 \end{bmatrix}.$$
   b) Montrer directement que si A est un anneau principal, alors
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$
   appartient à une base de A^2 ssi $\mathrm{PGCD}\,(a_1, a_2)$ est inversible dans A.

3) Soit A un anneau principal, $n \geq 2$ un entier et $L = A^n$. Notons $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de L. Soit $a \in A^n$.
   a) Montrer que si a appartient à une base de L, alors a est une base du sous-module Aa. Déduire que dans ce cas $\mathrm{PGCD}\,(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible.
   b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}(n, A)$ telle que l'image $b = Ba$ vérifie
$$b_2 = \mathrm{PGCD}\,(a_1, a_2) = \mathrm{PGCD}\,(b_1, b_2).$$
   Indication : Examiner d'abord le cas $n = 2$. Dans le cas général, on cherche B sous forme d'une matrice diagonale par blocs
$$\begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
   où B' est une matrice 2×2 et I une matrice identité.

c) Montrer par récurrence sur n qu'il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}(n, A)$ telle que l'image $b = Ba$ vérifie
$$b_n = \mathrm{PGCD}\,(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{PGCD}\,(b_1, \ldots, b_n).$$

d) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}(n, A)$ telle que $Ba = ce_n$, où $c = \mathrm{PGCD}\,(a_1, \ldots a_n)$.

e) Déduire que a appartient à une base de A^n ssi $\mathrm{PGCD}\,(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

4) Soit A un anneau intègre, M un A-module et M' un sous-module. On dit que M' est un *facteur direct* de M s'il existe un sous-module $M'' \subset M$ tel que $M' \oplus M'' = M$.

a) Montrer que, si A est un corps, tout sous-module est un facteur direct.

b) Soit $i : M' \to M$ l'inclusion. Montrer que M' est un facteur direct ssi il existe un homomorphisme de A-modules $p : M \to M'$ tel que $pi = id_{M'}$.

c) Montrer que $M' = 2\mathbf{Z}$ n'est pas un facteur direct de $M = \mathbf{Z}$ sur $A = \mathbf{Z}$.

d) Montrer qu'un idéal I est un facteur direct de A ssi $I = 0$ ou $I = A$.

e) Soit n un entier ≥ 1 et $M = A^n$. Montrer que le sous-module engendré par un élément non-nul $a \in M$ est un facteur direct ssi il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 1.$$

f) Déterminer les facteurs directs parmi les sous-modules suivants de $M = \mathbf{Z}^2$
$$M_1 = \mathbf{Z}\begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix},\ M_2 = \mathbf{Z}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cap \mathbf{Z}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ M_3 = \{\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \in \mathbf{Z}^2 \mid k \equiv 0\ (2)\ \},$$
$$M_4 = \mathbf{Z}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \mathbf{Z}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

g) Exhiber deux facteurs directs M_1 et M_2 de $\mathbf{Z}^2$ sur $A = \mathbf{Z}$ tels que $M_1 + M_2$ ne soit pas un facteur direct. Qu'en est-il pour $M_1 \cap M_2$?

h) Soit L un A-module libre de type fini et $L' \subset L$ un sous-module de même rang que L. Montrer qu'on a $L = L'$ ssi L' est un facteur direct de L. Indication : localiser par rapport à $S = A \setminus \{0\}$.

i) Supposons A principal. Soit L un A-module libre de type fini. Montrer qu'un sous-module $L' \subset L$ est un facteur direct ssi il est pur, c'est-à-dire que $x \in L$ appartient à L' s'il existe $a \in A$ tel que $ax \in L'$. (Indication : Si $p : L \to L/L'$ est la surjection canonique, montrer qu'il existe un homomorphisme s tel que $ps = id_{L/L'}$. Montrer ensuite que $L = s(L/L') \oplus L'$.) Déduire qu'une intersection de deux facteurs directs de L est un facteur direct.