Université Paris 7 — 26 mai 2002
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

Maîtrise de Mathématiques : MT401S Algèbre

Examen de Juin 2002

Question de cours

Soient A un anneau principal et M un A-module de type fini.

1) Qu'est-ce que le sous-module de torsion M_{tors} de M ? Montrer que M/M_{tors} est sans torsion.

2) Que peut-on dire d'un A-module de type fini sans torsion ?

3) Montrer que M_{tors} est un facteur direct de M qui admet un supplémentaire libre. Montrer par un exemple que ce supplémentaire n'est pas unique en général.
4) Soit $L \supset K$ une extension de corps finie. Qu'est-ce que le degré de L sur K ? Qu'est-ce que le groupe de Galois $Gal(L|K)$? Quand est-ce qu'on dit que l'extension est galoisienne ?
5) Supposons que $L \supset K$ est galoisienne de groupe de Galois cyclique d'ordre 10. Quel est le nombre d'extensions intermédiaires $L \supset E \supset K$?

I. Décompositions

Soit M le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$.

1) Quelle est la composante 3-primaire $M(3) \subset M$?
2) Quelle est la décomposition de M en $\mathbb{Z}$-modules indécomposables ?
3) Quelle est la décomposition de Smith de M et quels sont ses facteurs invariants ?

II. Cayley-Hamilton

Soient A un anneau commutatif, $n \geq 1$ et C une matrice $n \times n$ à coefficients dans A. Rappelons qu'on a

$$\hat{C}C = C\hat{C} = \det(C)I_n$$

où $(-1)^{i+j}\hat{C}_{ij}$ est le déterminant de la sous-matrice de C obtenue en rayant la j-ième ligne et la i-ième colonne. Soit M le conoyau du morphisme $f_C : A^n \to A^n$, $x \mapsto Cx$.

1) Montrer qu'on a $(\det C)m = 0$ pour tout $m \in M$.
2) Soient k un corps et B une matrice $n \times n$ à coefficients dans k. Soient C la matrice $X\,I_n - B$ (à coefficients dans $k[X]$) et $\chi_B(X) = \det(C)$ le polynôme caractéristique de B. Soit M_B le $k[X]$-module qui correspond à B. Montrer que $\chi_B(X)\,m = 0$ pour tout $m \in M_B$.
3) En déduire que $\chi_B(B) = 0$ (Cayley-Hamilton).

III. Idéaux maximaux de $\mathbb{Z}[X]$

On se propose de déterminer les idéaux maximaux de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

1) Montrer qu'aucun idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$ n'est maximal.
2) Soit p un nombre premier et $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme dont l'image dans $\mathbb{F}_p[X]$ est irréductible. Montrer que l'idéal (p, P) est maximal dans $\mathbb{Z}[X]$. Nous allons montrer dans la suite qu'on obtient ainsi tous les idéaux maximaux.

3) Soit I un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$.

4) Supposons que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal non nul de $\mathbb{Z}$. Montrer que $I = (p, P)$ pour un nombre premier p et un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont l'image dans $\mathbb{F}_p[X]$ est irréductible.

Dans la suite, nous supposons que $I \cap \mathbb{Z}$ est nul. Nous allons aboutir à une contradiction.

5) Montrer que le morphisme canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[X]$ se prolonge en un morphisme $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}[X]/I$ et que ce dernier se prolonge en un morphisme surjectif $\phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Z}[X]/I$.

6) Montrer que $\ker(\phi)$ est engendré par un polynôme irréductible $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

7) Montrer que I est engendré par le polynôme primitif $P \in \mathbb{Z}[X]$ associé à Q. Conclure.

IV. Modules semisimples sur un anneau principal

Soit A un anneau principal. Un A-module M est *semi-simple* si pour tout sous-module $M' \subset M$, il existe un sous-module $M'' \subset M$ tel que $M = M' \oplus M''$.

1) Soit k un corps. Montrer que tout k-module de type fini est semi-simple.

2) Soient p un irréductible de A et $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $(A/(p))^m$ est semi-simple.

3) Soient p un irréductible de A et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le module $A/(p^m)$ est semi-simple si et seulement si $m = 1$.

4) Soit M un module semi-simple. Montrer que tout sous-module $N \subset M$ est semi-simple.

5) Soient p un irréductible et M un A-module p-primaire de type fini. Montrer que M est semi-simple si et seulement si M est isomorphe à $(A/(p))^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$.

6) Soit M un A-module de torsion et de type fini. Montrer que M est semi-simple si et seulement si pour tout irréductible p de A, la composante p-primaire $M(p)$ est semi-simple. Déduire que M est semi-simple si et seulement si M est isomorphe à une somme directe finie de modules de la forme $A/(p)$, où p est irréductible.

7) Soient $n \geq 1$ et B une matrice carrée $n \times n$ à coefficients réels. Soit $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $x \mapsto Bx$. Montrer qu'on a équivalence entre
(i) Tout sous-espace $U \subset \mathbb{R}^n$ stable par f_B admet un supplémentaire stable par f_B.
(ii) B est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont de la forme

$$[a]\,,\ a \in \mathbb{R}, \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}\,,\ \rho > 0\,,\ \theta \in \mathbb{R}.$$