Université de Paris 7 Denis-Diderot

Maitrise de Mathématiques - Algèbre
MT 401
EXAMEN DU 2 SEPTEMBRE 2002
Durée : 3 heures

Les exercises sont indépendants.

On n'attend pas que l'ensemble des questions soit traité; le total des points du barême dépassera 20/20. Il sera tenu grand compte de la qualité de la rédaction, de la précision des références éventuelles aux résultats du cours et de la lisibilité de la copie.

Exercice I

Déterminer la décomposition en groupes abéliens indécomposables et les facteurs invariants de

$$M = \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/48\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/24\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}.$$

Exercice II

Soit $P(X) = X^5 + 30X^2 - 6X + 18$. On considère les anneaux quotients

$$A = \mathbf{Q[X]/Q[X]P(X)},\ \mathbf{B = Q[X]/Q[X]P(X^2)},\ \mathbf{C = Q[X]/Q[X]P(X+1)}.$$

1.a Est-ce que A est un corps ? Même question pour B et pour C.

1.b Est-ce que les anneaux A, B sont isomorphes ? Même question pour B, C et pour A, C.

On considère maintenant les anneaux quotients analogues à A, B, C obtenus en remplacant $\mathbf{Q}$ par $\mathbf{Z}$

$$A' = \mathbf{Z[X]/Z[X]P(X)},\ \mathbf{B' = Z[X]/Z[X]P(X^2)},\ \mathbf{C' = Z[X]/Z[X]P(X+1)}.$$

1.a' Même question que 1.a pour A', B', C' au lieu de A, B, C.

1.b' Même question que 1.b pour A', B', C' au lieu de A, B, C.

Exercice III

Le but de l'exercice est de décrire les corps contenus dans le 28-ième corps cyclotomique.

1.a Quel est le nombre de sous-groupes du groupe $\mathbf{Z/6Z}$?

1.b Faire la liste de tous les sous-groupes H du groupe $\mathbf{Z/2Z} \times \mathbf{Z/6Z}$.

1.c Pour chaque sous-groupe H de $\mathbf{Z/2Z} \times \mathbf{Z/6Z}$, déterminer la structure du groupe quotient G/H.

2 Soit $F = \mathbf{Q}(\mathbf{e^{2i\pi/7}})$ le 7-ième corps cyclotomique.

2.a Quel est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$?

2.b Trouver un nombre réel non rationnel α dans F, et un élément β de F tel que $\mathbf{Q}(\beta)$ soit une extension quadratique de $\mathbf{Q}$.

2.c Montrer que F a 4 sous-corps distincts: $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(\alpha), \mathbf{Q}(\beta), \mathbf{F}$, et que $\mathbf{Q}(\alpha)$ est une extension galoisienne cubique de $\mathbf{Q}$ (de degré 3).

3 Soit $L = \mathbf{Q}(\mathbf{e^{2i\pi/28}})$ le 28-ième corps cyclotomique.

3.a Quel est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$?

3.b Trouver trois éléments x_1, x_2, x_3 de L tels que les corps $\mathbf{Q(x_1)}, \mathbf{Q(x_2)}, \mathbf{Q(x_3)}$ soient distincts deux-à-deux, et quadratiques sur $\mathbf{Q}$.

3.c Décrire tous les corps L' contenus dans L, ainsi que les groupes de Galois $\mathrm{Gal}(L/L')$ et $\mathrm{Gal}(L'/\mathbf{Q})$.

Exercice IV

Soit k un corps. Pour deux $k[X]$-modules L et M, on note $Hom(L, M)$ l'ensemble des applications $k[X]$-linéaires $f : L \to M$.

1.a Définir une structure d'espace vectoriel sur $Hom(L, M)$. Supposons que k est le corps des nombres complexes. Rappeler la forme des $k[X]$-modules indécomposables de type fini. Déterminer la dimension de $Hom(L, M)$ lorsque L et M sont indécomposables de type fini.

1.b Montrer que si L et M sont de torsion et de type fini, l'espace $Hom(L, M)$ est de dimension finie. Pour toute application $k[X]$-linéaire $g : M_1 \to M_2$, définir une application linéaire naturelle

$$g_* : Hom(L, M_1) \to Hom(L, M_2).$$

Montrer que si $M = M_1 \oplus M_2$, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$Hom(L, M_1 \oplus M_2) \to Hom(L, M_1) \oplus Hom(L, M_2).$$

Soit *une suite exacte* de $k[X]$-modules

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0,$$

c'est-à-dire que i est injectif, p est surjectif et que le noyau de p est l'image de i.

2.a Montrer que la suite

$$0 \to Hom(N, L) \xrightarrow{i_*} Hom(N, M) \xrightarrow{p_*} Hom(N, N)$$

est exacte, c'est-à-dire que i_* est injectif et que son image est le noyau de p_*.

Supposons que L, M et N sont de torsion et de type fini et qu'il existe un isomorphisme $\phi : L \oplus N \to M$. On se propose de montrer qu'on peut choisir ϕ tel que $p \circ \phi$ soit la projection canonique et $\phi^{-1} \circ i$ l'injection canonique (c'est-à-dire que la suite est *scindable*).

2.b Montrer que l'application p_* est surjective. Indication : on pourra montrer que son image a même dimension que $Hom(N, N)$. Déduire que la suite est scindable.

3. Soit une matrice trigonale par blocs

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

où A est carrée $p \times p$ et B est carrée $q \times q$. Montrer, à l'aide de **2**, que les conditions suivantes sont équivalentes

(i) Il existe une matrice inversible P telle que

$$PTP^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

(ii) Il existe une matrice inversible

$$Q = \begin{bmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

telle que

$$QTQ^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

(iii) Il existe une matrice X de format $p \times q$ telle que $B = AX - XC$.