Université Paris 7 23 mars 2002
U.F.R. de Mathématiques B. Keller

Maîtrise de Mathématiques : MT401S Algèbre

Examen partiel

Question de cours

1) Qu'est-ce qu'un anneau factoriel ?
2) Soient A un anneau factoriel et F son corps des fractions. Qu'est-ce que le contenu d'un polynôme P à coefficients dans F ?
3) Soient A un anneau factoriel et F son corps des fractions. Soit $P \in A[X]$ un polynôme primitif tel que $P = QR$ pour deux polynômes Q, R à coefficients dans F de degré ≥ 1. Montrer que P est réductible dans $A[X]$.

Exercice I

Soit α une racine complexe du polynôme $X^4 + 1$. Soit B le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\alpha/3$.

1) Soit $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C}$ le morphisme d'anneaux tel que $f(X) = \alpha/3$. Montrer que B est l'image de f.

2) Quel est la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $P = 81X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$? Montrer que ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. En déduire qu'un polynôme $R \in \mathbb{Q}[X]$ s'annule en $\alpha/3$ si et seulement si il est multiple de P dans $\mathbb{Q}[X]$.

3) Montrer que f induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X]/(81X^4 + 1)$ sur B.

4) **Dans ce numéro et les suivants, on note p un nombre premier congru à 1 modulo 8.** Montrer que l'équation $x^4 = -1$ admet quatre solutions distinctes deux à deux dans $\mathbb{F}_p$.

5) Montrer que $B/(p)$ est isomorphe à un produit de quatre copies de $\mathbb{F}_p$.

6) Soit $u \in B$ et $n \geq 1$ un entier. Montrer que si u^n est divisible par p dans B, alors u est divisible par p.

Exercice II

1) Soit A un anneau intègre et F son corps des fractions. Soit $b \in F$ tel que b vérifie une équation unitaire
$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$
pour des $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ et un $n \geq 1$. Montrer que si A est factoriel, b appartient à A.

2) Soit k un corps et $A = k[X,Y]/(Y^2 - X^3)$. Montrer que A est intègre.

3) Notons x et y les images de X et Y dans A. Montrer qu'il existe un morphisme de k-algèbres $f : A \to k[T]$ tel que $f(x) = T^2$ et $f(y) = T^3$.

4) Montrer que tout élément de A s'écrit $R_1(x)y + R_0(x)$ pour des polynômes $R_1, R_0 \in k[X]$ uniques. Déduire que les monômes $x^r y^s$, $r \geq 0$, $s = 0, 1$, forment une base du k-espace vectoriel A.

5) Montrer que f est injectif.

6) Déterminer l'image de f.

7) Montrer que le corps des fractions de A est isomorphe à $k(T)$.

8) Montrer que A n'est pas factoriel. Indication : utiliser 1).