Université Paris 7 — 26 février 2002
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

Maîtrise de Mathématiques : Algèbre

TEST N^o 1

1) Soient A un anneau (commutatif) et B l'anneau $\mathbb{Z}/38\mathbb{Z}$.

a) Qu'est-ce qu'un idéal maximal de A ? Quels sont les idéaux maximaux de l'anneau B ?

b) Qu'est-ce qu'un élément inversible de A ? Quels sont les éléments inversibles de l'anneau B ?

c) Montrer qu'un élément de A est non inversible si et seulement si il est contenu dans un idéal maximal de A.

d) La classe de 4 engendre-t-elle un idéal maximal de l'anneau B ?

2) Soit j une racine complexe du polynôme $X^2 + X + 1$ et A le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par j.

a) Montrer que A est formé des nombres $n + mj$ où n, m sont des entiers.

b) Montrer que A est isomorphe à l'anneau $B = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$.

c) Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $A/(p)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 + X + 1)$.

d) Montrer que l'anneau $A/(p)$ est un corps si $p = 2$.

e) Montrer que l'anneau $A/(p)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ si $p = 7$ et qu'il est isomorphe à $\mathbb{F}_p[T]/(T^2)$ si $p = 3$.