Université Paris 7 — 09 avril 2002
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

Maîtrise de Mathématiques : Algèbre

TEST N^o 2

1) Soient A un anneau factoriel et n un entier ≥ 1. Soit $B = A[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ l'anneau des polynômes symétriques en $X_1, \ldots, X_n$. Montrer que B est encore factoriel.

2) Soient n un entier au moins égal à trois et $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les polynômes symétriques élémentaires en les $X_1, \ldots, X_n$. Exprimer les polynômes symétriques suivants comme des polynômes à coefficients entiers en les $s_1, \ldots, s_n$

$$\sum_i X_i^2 \, , \; \sum_i X_i^3 \, , \; \sum_{i \neq j} X_i^2 X_j^3 .$$

3) Soient A un anneau commutatif et M un A-module. Quand est-ce qu'on dit que M est de type fini ? Montrer que si, dans une suite exacte

$$L \to M \to N \to 0 \, ,$$

les modules L et N sont de type fini, il en est de même de M.

4) Soit n un entier ≥ 2. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et M le groupe abélien quotient de $\mathbb{Z}^n$ par le sous-groupe engendré par $(a, \ldots, a)$. Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$.