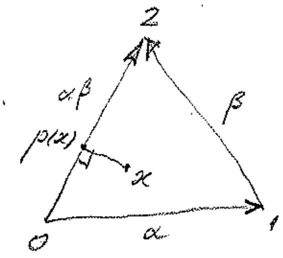
B. Keller et C. Lenart

M1 de Mathématiques : Topologie algébrique M2406
Un corrigé de l'examen du 26/05/2009

Question 1)

a) α est homologue à β s'il existe une 2-chaîne γ de X telle que $\partial\gamma = \alpha - \beta$.

b) Soit $p : \Delta^2 \to \Delta^2$ la projection orthogonale sur la face $\partial_1\Delta^2$. On identifie cette face de la façon canonique avec l'intervalle I.



Soit $\gamma : \Delta^2 \to X$, $x \longmapsto (\alpha\beta)(x)$.

Alors on a

$$\partial_0\gamma = \beta, \quad \partial_1\gamma = \alpha\beta, \quad \partial_2\gamma = \alpha$$

et donc

$$\partial\gamma = -\alpha\beta + (\beta + \alpha)$$

ce qui montre bien que $\alpha\beta$ est homologue à $\alpha + \beta$.

Notons $\sim$ la relation d'homologie et $\underset{htp}{\sim}$ la relation d'homotopie. Si $y \in X$ est le but de α, on a

$$\alpha + \alpha^{-1} \sim \alpha\alpha^{-1} \underset{htp}{\sim} \varepsilon_y \underset{htp}{\sim} \varepsilon_y\varepsilon_y \sim \varepsilon_y + \varepsilon_y$$

Il s'ensuit que $\varepsilon_y \sim 0$, que $\alpha + \alpha^{-1} \sim 0$ et donc que $\alpha^{-1} \sim -\alpha$.

c) Tout lacet α en x_0 est une 1-chaîne qui est un cycle. L'application $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$, qui envoie la classe d'homotopie de α sur sa classe d'homologie est un homomorphisme de groupes qui induit un isomorphisme

$$\pi_1(X, x_0)_{ab} \xrightarrow{\sim} H_1(X)$$

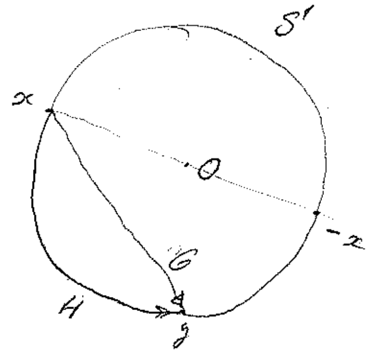
où l'abélianisé $\pi_1(X, x_0)_{ab}$ est le quotient par le ss-groupe distingué engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in \pi_1(X, x_0)$.

Question 2

a) f est homotope à g s'il existe une application continue $H : X \times I \longrightarrow Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$, $\forall x \in X$, et $H(x,1) = g(x)$, $\forall x \in X$.

b) Supposons que pour un $t \in I$, on a

$$(1-t)x + ty = 0$$



Alors $t \neq 0$ et $t \neq 1$. Donc x et y sont proportionnels. Comme $|x| = |y| = 1$, on doit avoir $y = x$ ou $y = -x$. On a exclu $y = -x$. Si on avait $y = x$, on aurait $(1-t)x + ty = x$. Contradiction. Le vecteur

$$G(x,y,t) = (1-t)x + ty$$

est donc non nul pour tout $t \in I$ et l'application

$$t \longmapsto G(x,y,t) / |G(x,y,t)| = H(x,y,t)$$

est bien définie, à valeurs dans S^1, continue et relie x à y.

c) Pour tout point $x \in S^n$, on a $g(x) \neq -f(x)$ car $f(x) \neq x$. Donc le chemin $t \longmapsto H(f(x), g(x), t) \in S^n$ est bien défini et relie $f(x)$ à $g(x)$ pour tout x. L'application

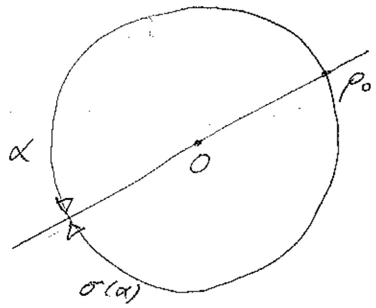
$$S^n \times I \longrightarrow S^n, \ (x,t) \longmapsto H(f(x), g(x), t)$$

est clairement continue et définit une homotopie de f à g.

Question 3

a) Par la question 1), on a

$$-\sigma(\alpha)+\alpha \sim \sigma(\alpha)^{-1}\alpha$$



Or le chemin composé $\beta = \sigma(\alpha)^{-1}\alpha$ est le lacet $t \longmapsto e^{2\pi i t}p_0$ et on sait que sa classe engendre $\pi_1(S^1, p_0)$.

Par 1c), la classe d'homologie de β engendre donc $H_1(S^1)$.

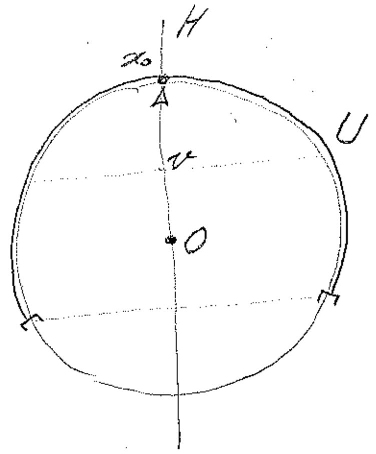
Donc la classe d'homologie de $\alpha - \sigma(\alpha)$ engendre $H_1(S^1)$.

On a $\sigma(\alpha - \sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) = \sigma(\alpha) - \alpha = -(\alpha - \sigma(\alpha))$.

Donc σ induit $-Id$ dans $H_1(S^1)$.

b) Pour $x \in S^n$, on a

$$|(x,v)| \leq |x|\cdot|v| = 1$$



Donc on a $(x,v) \in [-1,1]$ et $(x,v) < 1/2$ où $(x,v) > -1/2$ ce qui montre que U et V recouvrent S^n. Comme $v \in H$, on a $\sigma(v) = v$.

Pour $x \in S^n$, on a donc

$$(x,v) > -1/2 \iff -1/2 < (\sigma(x), \sigma(v)) = (\sigma(x), v)$$

ce qui montre bien que $\sigma(U) = U$. De même pour V.

Soit x_0 le pôle nord de S^n. Alors l'application

$$U \times I \longrightarrow U\ ,\ (x,t) \longmapsto H(x, x_0, t),$$

où H est comme dans 2b), est une contraction de U vers $\{x_0\}$.

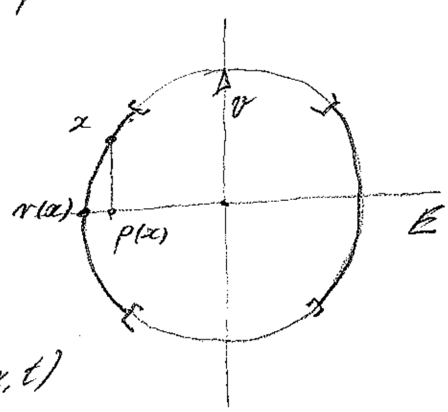
De même pour V.

c) Complétons $v_1 = v$ en une base orthonormée $v_1, \dots, v_n$ de H et une base orthonormée $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ de E.
Alors la matrice de σ est la matrice $(n+1)\times(n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Le sous-espace E' est engendré par $v_2, \dots, v_{n+1}$. Clairement il est stable par σ. L'application induite a pour matrice la sous-matrice de A formée des coefficients a_{ij}, $i \geq 2, j \geq 2$. Clairement σ' est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace de E' engendré par $v_2, \dots, v_n$. Ce sous-espace est égal à $E' \cap H$.

d) L'inclusion $S^{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} U \cap V$ induit des isomorphismes en homologie car elle est une équivalence d'homotopie. En effet, soit $r : U\cap V \longrightarrow S^{n-1}$ l'application qui envoie un élément $x \in U \cap V$ sur $r(x) = p(x)/|p(x)|$, où $p : E \longrightarrow E'$ est la projection orthogonale sur E'.



Alors on a $r \circ i = Id_{S^{n-1}}$ et $i \circ r$ est homotope à l'identité de $U \cap V$ par l'homotopie

$$H : (U\cap V) \times I \longrightarrow U \cap V, \quad (x,t) \longmapsto G(r(x), x, t)$$

où G est défini dans 2b).

e) D'après 3b), les espaces U et V sont contractiles. Comme $n \geq 2$ on a donc $H_n(U) = 0 = H_n(V)$ et $H_{n-1}(U) = 0 = H_{n-1}(V)$.

D'après 3d), on a un

isomorphisme $H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(U\cap V)$. Comme $n \geq 2$, on a $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. On obtient donc

$$\underbrace{H_n(U)\oplus H_n(V)}_{=0} \longrightarrow H_n(S^n) \xrightarrow{\delta} \underbrace{H_{n-1}(U\cap V)}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H_{n-1}(U)\oplus H_{n-1}(V)}_{=0}$$

Comme la suite est exacte, δ est injectif et surjectif. C'est donc un isomorphisme. L'application $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ laisse stables U et V (par 3b) et donc $U\cap V$. Dans $S^{n-1} \subset U\cap V$, elle induit la symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $\mathbb{E}'$ (par 3c). Par l'hypothèse de récurrence, σ induit $-Id$ dans $H_{n-1}(S^{n-1})$. Le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[d, "\sigma"'] & U\cap V \arrow[d, "\sigma"] \\
S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"'] & U\cap V
\end{tikzcd}$$

donne un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "\sim", "i_*"'] \arrow[d, "-Id = \sigma_*"'] & H_{n-1}(U\cap V) \arrow[d, "\sigma_*"] \\
H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "\sim", "i_*"'] & H_{n-1}(U\cap V).
\end{tikzcd}$$

Donc σ induit $-Id$ dans $H_{n-1}(U\cap V)$.

f) Par la fonctorialité de δ, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r, "\delta", "\sim"'] \arrow[d, "\sigma_*"'] & H_{n-1}(U\cap V) \arrow[d, "\sigma_* = -Id"] \\
H_n(S^n) \arrow[r, "\sim", "\delta"'] & H_{n-1}(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

Donc σ induit $-Id$ dans $H_n(S^n)$.

Question 4

a) Pour un vecteur v non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$, notons σ_v la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à v. Notons $e_1, \ldots, e_{n+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors on a

$$-Id_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sigma_{e_1} \sigma_{e_2} \cdots \sigma_{e_{n+1}}.$$

b) Par 3f), les applications σ_{e_i} induisent $-Id$ dans $H_n(S^n)$. Donc la composition $-Id_{\mathbb{R}^{n+1}}$ de $(n+1)$ facteurs σ_{e_i} induit $(-Id)^{n+1}$.

c) Par 2c), l'application f est homotope à $-Id$. Donc elle induit la même application en homologie que $-Id$. Par le point précédent, on a donc $f_* = (-Id)^{n+1}$.

Question 5

a) On sait que $H_n(S^n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et que tout homomorphisme $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est la multiplication par un unique entier (à savoir par $\varphi(1)$). Donc l'homomorphisme $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ est la multiplication par un unique entier $\deg(f)$.

b) On sait que $Id_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ est l'identité et que $(fg)_* = f_* g_*$. Il en résulte que $\deg(Id) = 1$ et $\deg(fg) = (\deg f) \cdot (\deg g)$. Si $f : S^n \to S^n$ est un homéomorphisme, alors $\deg(f)$ est inversible d'inverse $\deg(f^{-1})$, car $f \circ f^{-1} = Id$. Comme on a $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$, on a $\deg(f) = \pm 1$.

d) Comme l'application donnée $G \times S^n \longrightarrow S^n$ est une action de groupe, on a $\lambda_{gh} = \lambda_g \lambda_h$ pour tous $g, h \in G$.

Donc on a
$$\deg(\lambda_{gh}) = \deg(\lambda_g)\deg(\lambda_h).$$

En outre λ_g est un homéomorphisme (d'inverse $\lambda_{g^{-1}}$). Il s'ensuit que $\deg(\lambda_g) \in \mathbb{Z}^\times$ et que l'application
$$G \longrightarrow \mathbb{Z}^\times,\ g \longmapsto \deg(\lambda_g)$$
est un homomorphisme de groupes.

e) Comme l'action de G sur S^n est libre, l'application λ_g pour $g \neq e$, n'a pas de points fixes. Donc, par 5d), on a $\deg(\lambda_g) = (-1)^{n+1}$ et comme n est pair, $\deg(\lambda_g) = -1$. Donc le noyau de l'homomorphisme $G \to \mathbb{Z}^\times,\ g \mapsto \deg \lambda_g$ est réduit à l'élément neutre et G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Z}^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme G est non trivial, on a $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.