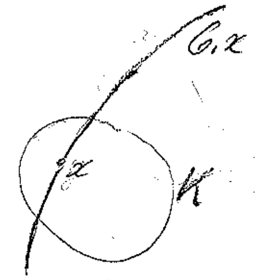
Complément sur les quotients séparés

Soient X un espace localement compact et G un groupe topologique
qui agit proprement sur X.

Prop. : a) Toutes les orbites de G dans X sont fermées.

b) L'espace quotient X/G est séparé.

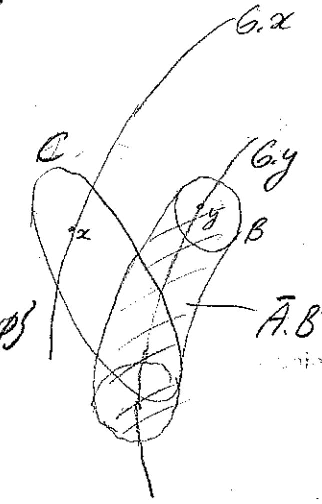
Dém. : a) Soient x un point de X. Il suffit de montrer que $K \cap G.x$
est fermé pour tout compact K de X. Soit donc $K \subset X$ un
compact. On peut supposer que $K \cap G.x$ est non vide et
même que $x \in K$. Alors on a



$$\{g \in G \mid gx \in K\} \subseteq A = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$$

Par hypothèse, l'adhérence $\bar{A}$ est compact. Donc
$\bar{A}.x$ est compact, en tant qu'image de $\bar{A}$ par
l'application continue $g \mapsto gx$. On a $G.x \cap K = \bar{A}.x \cap K$
ce qui montre bien que $\bar{A}x \cap K$ est compact.

b) La relation $\sim_G$ est ouverte (comme toujours pour une
action continue). Il suffit donc de montrer que son graphe est fermé.
Soient $x, y \in X$ tels que $G.x \neq G.y$. Soit B un voisinage
compact de y contenu dans l'ouvert $X \setminus G.x$ (on utilise a)).
Soit C un voisinage compact de x. Alors l'ensemble



$$A = \{g \in G \mid g.B \cap C \neq \emptyset\} \subset \{g \in G \mid g(B \cup C) \cap (B \cup C) \neq \emptyset\}$$

est relativement compact. Donc la partie $\bar{A}.B \subset X$
est compacte. En outre elle ne rencontre pas $G.x$.
Alors $U = C \setminus \bar{A}.B$ est un voisinage de x qui ne rencontre pas $G.B$.
Donc $G.U$ et $G.B$ sont disjoints et $p(U)$ et $p(B)$ sont des voisinages
disjoints de $p(x)$ et $p(y)$ dans X/G.