Un corrigé possible de l'examen final

1. (a) Notant $C = [0,1] \times [0,1]$, on définit (*Voir la figure jointe*)
   - les quatre 0-simplexes (applications continues de $\Delta^0 = \{1\}$ dans C)
   $$A : 1 \mapsto (0,0)\,, \qquad A' : 1 \mapsto (1,1)\,, \qquad B : 1 \mapsto (1,0)\,, \qquad B' : 1 \mapsto (0,1)\,;$$
   - les cinq 1-simplexes (applications continues de $\Delta^1 = [0,1]$ dans C)
   $$a : t \mapsto (t,0)\,, \quad a' : t \mapsto (1-t,1)\,, \quad b : t \mapsto (0,t)\,, \quad b' : t \mapsto (1,1-t)\,, \quad c : t \mapsto (t,t)\,;$$
   - les deux 2-simplexes[1]
   $$\alpha : \Delta^2 \to C : (\lambda,\mu,\nu) \mapsto (\mu, \mu+\nu)\,, \qquad \beta : \Delta^2 \to C : (\lambda,\mu,\nu) \mapsto (\mu+\nu, \mu)\,.$$

   Soit l'homéomorphisme $\phi : C \to D^2 : (x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}}(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2})$; soit $\iota : D^2 \to S^2 : (x,y) \mapsto (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$; on note $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ la surjection canonique (continue). Si on pose $q = p \circ \iota \circ \phi$, il en résulte
   - deux 0-simplexes : $\widehat{A} = q \circ A = q \circ A'$ et $\widehat{B} = q \circ B = q \circ B'$;
   - trois 1-simplexes : $\widehat{a} = q \circ a = q \circ a'$ et $\widehat{b} = q \circ b = q \circ b'$, ainsi que $\widehat{c} = q \circ c$;
   - deux 2-simplexes : $\widehat{\alpha} = q \circ \alpha$ et $\widehat{\beta} = q \circ \beta$;

   définissant sur $\mathbb{R}P^2$ une structure de Δ-complexe.

   (b) Le calcul des bords est immédiat :
   $$\begin{aligned} d(\widehat{\alpha}) &= \widehat{a} - \widehat{b} + \widehat{c}\,, & d(\widehat{\beta}) &= \widehat{b} - \widehat{a} + \widehat{c}\,,\\ d(\widehat{a}) &= d(\widehat{b}) = \widehat{B} - \widehat{A}\,, & d(\widehat{c}) &= \widehat{A} - \widehat{A} = 0\,. \end{aligned}$$
   C'est dire que l'homologie du Δ-complexe $\mathbb{R}P^2$ est celle du complexe de chaînes
   $$0 \to \mathbb{Z}\widehat{\alpha} \oplus \mathbb{Z}\widehat{\beta} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}\widehat{a} \oplus \mathbb{Z}\widehat{b} \oplus \mathbb{Z}\widehat{c} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}\widehat{A} \oplus \mathbb{Z}\widehat{B} \to 0$$
   où f (*resp.* g) a pour matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (*resp.* $N = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$).

   Les manipulations transformant M en $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ correspondent aux changements de bases $(\widehat{\alpha'}, \widehat{\beta'}) = (\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha} + \widehat{\beta})$ et $(\widehat{a'}, \widehat{b'}, \widehat{c'}) = (\widehat{a} - \widehat{b} + \widehat{c}, \widehat{c}, \widehat{b})$; après quoi le changement de base $(\widehat{A'}, \widehat{B'}) = (\widehat{A}, \widehat{B} - \widehat{A})$ achève de transformer N en $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   De tout cela résulte que
   $$\ker f = 0\,, \qquad \operatorname{im} f = \mathbb{Z}\widehat{a'} \oplus \mathbb{Z}(2\widehat{b'})\,, \qquad \ker g = \mathbb{Z}\widehat{a'} \oplus \mathbb{Z}\widehat{b'}\,, \qquad \operatorname{im} g = \mathbb{Z}\widehat{B'}\,,$$
   d'où l'on tire directement $(\ker g)/(\operatorname{im} f) \cong \mathbb{Z}/2$ et $(\mathbb{Z}\widehat{A'} \oplus \mathbb{Z}\widehat{B'})/(\operatorname{im} g) \cong \mathbb{Z}$. Ainsi
   $$H_k^{\Delta}(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \geq 2 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si} \quad k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}.$$

   (c) Appliquer le théorème d'isomorphisme entre homologies singulière et simpliciale.

[1] La notation se réfère à $\Delta^2 = \left\{ (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} \lambda+\mu+\nu = 1 \\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0 \end{array} \right\}$.

2. (a) La suite exacte longue associée à la paire (X, A) se termine par

$$0 \to H_1(X,A) \to H_0(A) \xrightarrow{j_*} H_0(X) \to H_0(X,A) \to 0$$

puisque $H_1(X) = 0$. En outre, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ pour cause de connexité par arcs, tandis que

$$H_0(A) = H_0\left(\coprod_{k=1}^{n} \{(k,0)\}\right) \cong \bigoplus_{k=1}^{n} H_0(\{(k,0)\}) \cong \mathbb{Z}^n .$$

Plus précisément, chaque composante connexe par arcs (chaque singleton) de A étant contenue — et pour cause ! — dans l'unique c.c.p.a. de X, chaque facteur de $H_0(A)$ a pour image isomorphe $H_0(X)$. Autrement dit, l'inclusion $j : A \hookrightarrow X$ induit

$$j_* : \mathbb{Z}^n \cong H_0(A) \to H_0(X) \cong \mathbb{Z} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_n .$$

La conclusion se déduit de l'exactitude de la suite en $H_1(A)$.

(b) De l'inclusion $\ker j_* \subset \mathbb{Z}^n$ on déduit que $\ker j_*$ est un groupe abélien libre.
Plus précisément, on peut, par exemple, considérer le déterminant $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Il montre que, si $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^n$, une autre base est fournie par la famille $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_n)$.
En outre il est clair que $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de $\ker j_*$, puisque $j_*\left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} \mathbb{Z}(e_k - e_{k+1})\right) = \{0\}$, alors que $j_*(e_n) = 1 \neq 0$.
Pour obtenir une base de $H_1(X, A)$, utiliser l'isomorphisme canonique obtenu au (a).

(c) Soit $B = \{1, \ldots, n\}$: ainsi $A = B \times \{0\}$. Par ailleurs l'homotopie

$$h : X \times [0,1] \to X : (x_1, x_2; t) \mapsto (x_1, tx_2)$$

rétracte $X = \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \times \{0\}$, avec $h(x, 0; t) = (x, 0)$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc X/A a le type d'homotopie de $(\mathbb{R} \times \{0\})/A = (\mathbb{R} \times \{0\})/(B \times \{0\}) \approx \mathbb{R}/B$.

Soit $N = [1, n]$ et $h' : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto \begin{cases} 1 + t(x-1) & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq n \\ n + t(x-n) & \text{si} \quad x \geq n \end{cases}$.

Cette homotopie rétracte $\mathbb{R}$ sur N, avec $h'(x,t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in N$.
Donc $\mathbb{R}/B$ a le type d'homotopie de N/B.

Soit $E = \{1, n\} \subset B$. (*Voir la figure jointe*)

L'application-quotient $q : N \to N/B$ factorise à travers N/E, qui est notoirement homéomorphe à S^1 *via* l'application $f : N \to S^1 : x \mapsto e^{i2\pi(x-1)/(n-1)}$.
Finalement, posant $Z = \{e^{i2\pi k/(n-1)} \mid k \in \{0, \ldots, n-2\}\}$, on obtient $B/E \approx Z$. Et donc $N/B \approx (N/E)/(B/E)$ est homéomorphe à S^1/Z, célèbre bouquet[2] de $(n-1)$ cercles.

[2] Attention ! S'il est vrai que $Z = \mathbb{U}_{n-1}$ en tant qu'*ensembles*, le quotient est obtenu par réduction de Z à un point : il ne s'agit pas de l'opération du *groupe* des racines $(n-1)^{\text{èmes}}$ de l'unité. (On sait bien que $S^1/\mathbb{U}_{n-1} \approx S^1$.)

(d) Il suffit de vérifier que (X, A) est un bonne paire.
À cet effet, on peut définir, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, le disque

$$D_k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 - k)^2 + (x_2)^2 < \tfrac{1}{16}\}\,,$$

puis poser $V = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$. Il est clair que A est fermé dans $X = \mathbb{R}^2$, que V est ouvert dans X, que A est inclus dans V et que A est rétract par déformation de V.

(e) Notons $\varepsilon : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2i\pi t}$ et, de nouveau, $q : N \to N/B$ la surjection canonique.
Alors, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, la composée

$$\gamma'_k : [0,1] \xrightarrow{\gamma_k} N \xrightarrow{q} N/B \xrightarrow{\approx} S^1/Z \xrightarrow{\approx} (S^1)^{\vee(n-1)}$$

factorise à travers ε en l'inclusion de la $k^{\text{ème}}$ “fleur” du bouquet $(S^1)^{\vee(n-1)}$.
Notant Ω l'unique point commun de ces $(n-1)$ “fleurs”, il en résulte que $\pi_1((S^1)^{\vee(n-1)}, \Omega)$ est le groupe libre sur les $(n-1)$ générateurs $[\gamma'_k]$.
Remonter par l'homéomorphisme $N/B \approx (S^1)^{\vee(n-1)}$ pour atteindre $\pi_1(N/B, B/B)$.
Utiliser l'homotopie composée $X/A \simeq N/B$ pour atteindre $\pi_1(X/A, A/A)$.

(f) Sachant que $H_1(X/A)$ est l'abélianisé de $\pi_1(X/A, A/A)$, il ne reste plus qu'à composer avec l'isomorphisme $H_1(X/A) \cong H_1(X, A)$ obtenu au (d).

Remarque. Étant donné que $d(\gamma_k) = \{k+1\} - \{k\}$, on voit, en remontant à la définition du morphisme de connexion $H_1(X, A) \to H_0(A)$, que cette base est celle du (b) au signe près.

3. Notant les inclusions $\eta_{q,p} : X_p \hookrightarrow X_q$ et $\eta_p : X_p \hookrightarrow X$, on a $\phi_{q,p} = (\eta_{q,p})_*$ et $\phi_p = (\eta_p)_*$.

(a) Soit $c \in H_j(X)$. On écrit $c = [\gamma]$ avec $\gamma = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \gamma_k \in Z_j(X)$, où les $\gamma_k : \Delta^j \to X$ sont des simplexes et $\lambda_k \in \mathbb{Z}$. Par compacité de Δ^j et continuité de γ_k, il existe, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, un $p(k) \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_k(\Delta^j) \subset X_{p(k)}$. Prendre $p = \max_{k=1}^{m} p(k)$; noter $\gamma'_k : \Delta^j \to X_p$ le simplexe tel que $\gamma_k = \eta_p \circ \gamma'_k$; poser $\gamma' = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \gamma'_k$. L'injectivité de $(\eta_p)_* : C_{j-1}(X_p) \to C_{j-1}(X)$ fait que $\gamma' \in Z_j(X_p)$. Poser $c' = [\gamma'] \in H_j(X_p)$.
Il est clair que $c = (\eta_p)_*(c') = \phi_p(c')$.

(b) Écrire $c' = [\gamma']$ avec $\gamma' = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \gamma'_k \in Z_j(X_p)$; poser $\gamma_k = \eta_p \circ \gamma'_k$ et $\gamma = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \gamma_k$.
L'hypothèse signifie qu'il existe une chaîne $\beta = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell \beta_\ell \in C_{j+1}(X)$ telle que $d(\beta) = \gamma$.
Par compacité de Δ^{j+1} et continuité de β_ℓ, il existe, pour tout $\ell \in \{1, \dots, n\}$, un $q(\ell) \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_\ell(\Delta^{j+1}) \subset X_{q(\ell)}$. Prendre $q_0 = \max_{\ell=1}^{n} q(\ell)$ et $q = \max(q_0, p)$; noter $\beta''_\ell : \Delta^{j+1} \to X_q$ le simplexe tel que $\beta_\ell = \eta_q \circ \beta''_\ell$; poser $\beta'' = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell \beta''_\ell \in C_{j+1}(X_q)$; poser $\gamma'' = d(\beta'') \in B_j(X_q)$. On a $(\eta_q)_*(\gamma'') = \gamma$ parce que η_q commute aux bords ; et $(\eta_{q,p})_*(\gamma') = \gamma''$ par injectivité de $(\eta_{q,p})_* : C_j(X_p) \to C_j(X_q)$.
Il est clair que $\phi_{q,p}(c') = (\eta_{q,p})_*([\gamma']) = [\gamma''] = 0 \in H_j(X_q)$.

4. (a) Supposons $n = 0$. Alors, nécessairement, $k = 0$.
Explicitement : $S^0 = \{-1, +1\}$ et, de deux choses l'une, $A = \{-1\}$ ou $A = \{+1\}$.
Dans un cas comme dans l'autre, $S^0 \setminus A$ est un singleton, d'où le résultat.

(b) Supposons $k = 0$ et $n \geq 1$.
Alors $S^n \setminus A$ est homéomorphe au disque D^n, donc contractile.
Le résultat s'en déduit aussitôt.

(c) Par définition, $B = A_+ \cap A_- = \phi(I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\}) \approx I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\} \approx I^{k-1}$.
Par définition, $S^n \setminus A = S^n \setminus (A_+ \cup A_-) = (S^n \setminus A_+) \cap (S^n \setminus A_-)$.
Par définition, $S^n \setminus B = S^n \setminus (A_+ \cap A_-) = (S^n \setminus A_+) \cup (S^n \setminus A_-)$.
En outre, A_+ et A_- étant compacts, $S^n \setminus A_+$ et $S^n \setminus A_-$ sont des ouverts de S^n.

(d) En tout degré $j \in \mathbb{N}$, la suite exacte de Mayer-Vietoris en homologie réduite s'écrit

$$0 \to \widetilde{H}_j(S^n \setminus A) \xrightarrow{\sigma_*} \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_+) \oplus \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_-) \to 0$$

puisque, par hypothèse de récurrence, $\widetilde{H}_{j+1}(S^n \setminus B) = 0$ et $\widetilde{H}_j(S^n \setminus B) = 0$.
Notant $\sigma_\pm : (S^n \setminus A) \hookrightarrow (S^n \setminus A_\pm)$ les inclusions, on sait que

$$\sigma_* : \widetilde{H}_j(S^n \setminus A) \to \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_+) \oplus \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_-) : c \mapsto ((\sigma_+)_*(c), (\sigma_-)_*(c))\,.$$

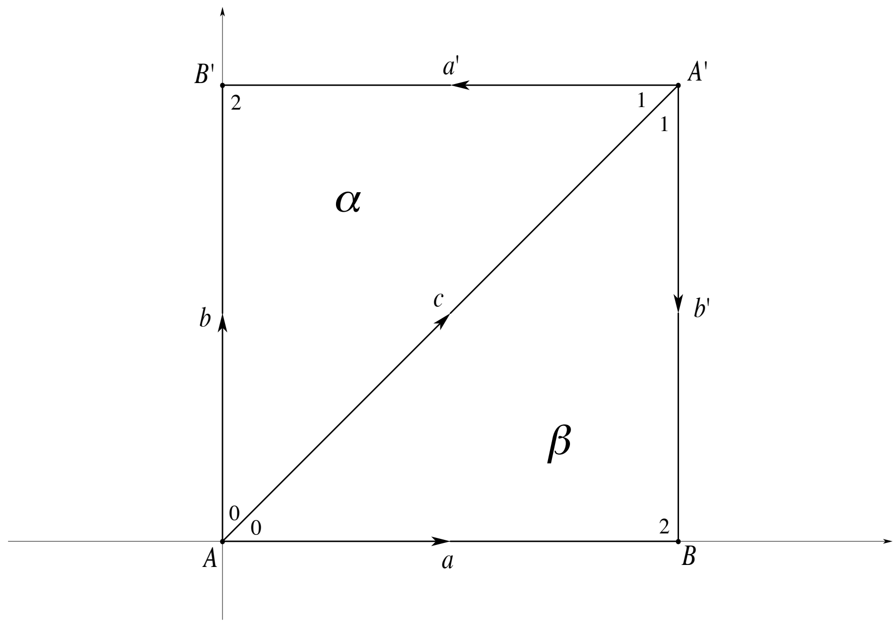
Le résultat annoncé résulte donc de l'injectivité de σ_* : si $c \neq 0$, l'une au moins des deux images $(\sigma_+)_*(c)$ et $(\sigma_-)_*(c)$ doit être non nulle.

(e) On pose $A_0 = A$ et $c_0 = c \in \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_0)$.
Si $(\sigma_+)_*(c) \neq 0$, on pose $A_1 = A_+$ et $c_1 = (\sigma_+)_*(c_0) = (\sigma_+)_*(c) \neq 0$.
Sinon, on pose $A_1 = A_-$ et $c_1 = (\sigma_-)_*(c_0) = (\sigma_-)_*(c) \neq 0$.
Dans les deux cas, on a $A_1 \subset A_0$ et la classe $c_1 \in \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_1)$, déduite de c_0 *via* l'inclusion $(S^n \setminus A_0) \subset (S^n \setminus A_1)$, est non nulle.
Comme A_1 est lui-même homéomorphe à $I^{k-1} \times [0, 1]$, l'argument précédent s'applique de nouveau ; il fournit un sous-espace $A_2 \subset A_1$ et une classe $c_2 \in \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_2)$, déduite de c_1 *via* l'inclusion $(S^n \setminus A_1) \subset (S^n \setminus A_2)$, avec $c_2 \neq 0$.
La construction des couples (A_p, c_p) avec $c_p \neq 0$ se poursuit indéfiniment par récurrence.

La construction même de la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ montre qu'il existe une suite d'intervalles $[0, 1] \supset [x_1, y_1] \supset \cdots \supset [x_p, y_p] \supset [x_{p+1}, y_{p+1}] \supset \cdots$ telle que A_p est homéomorphe par ϕ à $I^{k-1} \times [x_p, y_p]$, avec $(x_{p+1}, y_{p+1}) = (x_p, \frac{1}{2}(x_p + y_p))$ ou $(\frac{1}{2}(x_p + y_p), y_p)$. De là un unique $z \in [0, 1]$ tel que $\bigcap_{p=0}^{+\infty} [x_p, y_p] = \{z\}$. Et $C = \bigcap_{p=0}^{+\infty} A_p = \phi(I^{k-1} \times \{z\}) \approx I^{k-1} \times \{z\} \approx I^{k-1}$.

(f) Les hypothèses de l'exercice 3. sont satisfaites si on prend $X = S^n \setminus C$ et $X_p = S^n \setminus A_p$.
(Ici $X = S^n \setminus C = S^n \setminus \left(\bigcap_{p=0}^{+\infty} A_p \right) = \bigcup_{p=0}^{+\infty} (S^n \setminus A_p) = \bigcup_{p=0}^{+\infty} X_p$; et un compact recouvert par une suite d'ouverts emboîtés est contenu dans tout ouvert de rang assez grand...)
On applique la question 3. (b), en en reprenant les notations, avec $p = 0$ et $c' = c_0$.
Comme $\widetilde{H}_j(X) = \widetilde{H}_j(S^n \setminus C) = 0$ par hypothèse de récurrence, on a nécessairement $\phi_0(c_0) = 0$. On conclut donc qu'il existe un entier $q \geq 0$ tel que $\phi_{q,0}(c_0) = 0$.
Or, par construction, $\phi_{q,0}(c_0) = c_q \neq 0$.
La contradiction ne peut provenir que de la seule hypothèse arbitrairement introduite ci-dessus au (d), à savoir l'existence dans $\widetilde{H}_j(S^n \setminus A)$ d'une classe $c \neq 0$.

Exercice 1.(a)



Exercice 2.(c)