Université Paris Diderot – Paris 7 24/05/2011
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et C. Leruste

M1 de Mathématiques : Topologie algébrique M 2406

Un corrigé possible de l'examen final

0.1 Exercice 1)

a) et b) Voir les notes de TD du 5 au 7 avril.
c) Les homologies singulière et simpliciale sont isomorphes.

0.2 Exercice 2)

La suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\gamma} C \longrightarrow 0$$

se décompose au début (*resp.* à la fin) en l'isomorphisme $A \xrightarrow[\alpha]{\cong} \ker f$ (*resp.* l'égalité $\operatorname{im}\gamma = C$) encadrant les cinq suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \operatorname{im} f \longrightarrow 0\,, \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} f \longrightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\phi} \operatorname{im}\phi \longrightarrow 0\,, \tag{2}$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\phi \longrightarrow B \xrightarrow{\psi} \ker g \longrightarrow 0\,, \tag{3}$$

$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{g} \operatorname{im} g \longrightarrow 0\,, \tag{4}$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} g \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\gamma} \operatorname{im}\gamma \longrightarrow 0\,. \tag{5}$$

a) L'hypothèse faite sur f signifie entre autres que $\operatorname{im} f \cong \mathbb{Z}^2$, montrant que la suite (1) est scindée (puisque $\mathbb{Z}^2$ est libre).
De $(\ker f) \oplus \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}^3$ on tire l'isomorphisme $\ker f \cong \mathbb{Z}$.
On compose avec α pour obtenir $A \cong \mathbb{Z}$.

L'hypothèse faite sur g entraîne *via* la suite (5) que $\operatorname{im}\gamma \cong \mathbb{Z}$.
Utiliser l'égalité $\operatorname{im}\gamma = C$ pour obtenir $C \cong \mathbb{Z}$.

b) La pleine hypothèse faite sur f implique $\operatorname{im}\phi \cong \mathbb{Z}^2$ *via* la suite (2).
L'hypothèse faite sur g signifie entre autres que $\operatorname{im} g \cong \mathbb{Z}$, montrant que la suite (4) est scindée (puisque $\mathbb{Z}$ est libre).
De $(\ker g) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^3$ on tire l'isomorphisme $\ker g \cong \mathbb{Z}^2$.
Reportant dans la suite (3), qui est donc nécessairement scindée, on obtient l'isomorphisme $B \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^4$.

0.3 Exercice 3)

a) Procéder radialement sur (l'adhérence de) chacune des trois composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus X$, centrées en 0 , 1/2 et −1/2 respectivement. (*Voir la* ***figure 1*** *page 6*)

Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1\}$ et $A_\pm = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0 < \left|z \mp \tfrac{1}{2}\right| \leq \tfrac{1}{4}\right\}$.

Les homotopies $h : A \times [0,1] \to A : (z,t) \mapsto (1-t)z + t\dfrac{z}{|z|} = z\left[(1-t) + \dfrac{t}{|z|}\right]$ et

$$h_\pm : A_\pm \times [0,1] \to A_\pm : (z,t) \mapsto \pm\frac{1}{2} + \left(z \mp \frac{1}{2}\right)\left[(1-t) + \frac{t}{4|z \mp \frac{1}{2}|}\right],$$

raccordées à l'application identique sur X, réalisent la rétraction demandée.

b) Compte tenu de la rétraction par déformation du **a)**, on a

$$\pi_1(X,0) \cong \pi_1((\mathbb{C} \setminus \{1/2,-1/2\}),0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}\,,$$

groupe (non abélien) libre à deux générateurs.

c) On fait encore référence au **a)** pour affirmer que l'homologie de X est isomorphe à celle de $\mathbb{C} \setminus \{1/2,-1/2\}$. Explicitement :

$$H_p(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \geq 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si} \quad p = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad p = 0 \end{cases}.$$

Bases proposées :

- pour $H_1(X)$, les classes des 1-simplexes

  $$\sigma_\pm : \Delta^1 \to X : (1-t,t) \mapsto \pm\frac{1}{2} \mp \frac{1}{4}e^{2\mathrm{i}\pi t}$$

  faisant respectivement un tour de $\pm 1/2$;

- pour $H_0(X)$, la classe du 0-simplexe d'image 0.

d) Chaque collier se rétracte radialement par déformation sur, disons, son cercle de rayon moyen. L'homologie de Y est donc (isomorphe à) celle de la réunion disjointe de 3 cercles. Explicitement :

$$H_p(Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \geq 2 \\ \mathbb{Z}^3 & \text{si} \quad p = 1 \\ \mathbb{Z}^3 & \text{si} \quad p = 0 \end{cases}.$$

Bases proposées :

- pour $H_1(Y)$, les classes des 1-simplexes associés aux générateurs canoniques des groupes fondamentaux de chacun des cercles-rétracts ;

- pour $H_0(Y)$, les classes de 0-simplexes d'images arbitrairement choisies dans chacun des colliers.

e) L'inclusion des trois composantes connexes par arcs de Y dans l'unique composante de X se traduit classiquement par

$$M(\alpha_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z})\,.$$

Le générateur de $H_1(Y)$ dû au collier centré en $\pm 1/2$ est homologue dans X à $\sigma_\pm$.
Le générateur relatif au collier centré en 0 est (en tant que lacet) homotope dans X au composé de deux lacets faisant une fois le tour de $1/2$ et $-1/2$ respectivement.
Les 1-simplexes associés à ceux-ci sont homologues dans X à σ_+ et σ_- respectivement.
Et leur composé est alors homologue dans X à $\sigma_+ + \sigma_-$
De tout cela il résulte que

$$M(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})\,.$$

(Les centres des colliers formant Y sont pris dans l'ordre $1/2$, $-1/2$, 0.)

f) Il est bien connu que X est homéomorphe au "bermuda". (***Figure 2*** *page 6*)
La torsion des "jambes" (***figure 3***), suivie de leur courbure vers le haut, produit X'.

g) Il s'agit de la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au couple (X', X'') : elle s'applique car les intérieurs de X' et X'' recouvrent Z. Par ailleurs $X' \cap X'' = Y' = Y'' \approx Y$.

h) D'après les calculs précédents, la suite exacte du **g)** s'écrit

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\;f\;} \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \tag{6}$$

$$\longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\;g\;} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(Z) \longrightarrow 0\,.$$

Pour $p \in \{0, 1\}$, notons $\alpha'_p : H_p(Y') \to H_p(X')$ l'application déduite de α_p *via* les homéomorphismes $Y' \approx Y$ et $X' \approx X$.
Notation analogue pour $\alpha''_p : H_p(Y'') \to H_p(X'')$ *via* $Y'' \approx Y$ et $X'' \approx X$.
On a alors $f = (\alpha'_1, \alpha''_1)$ et $g = (\alpha'_0, \alpha''_0)$, d'où, par superposition de matrices,

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{Z}) \qquad \text{et} \qquad M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})\,.$$

On voit facilement que f est de rang 2 (le déterminant "nord-ouest" 2×2 est non nul, et la troisième colonne est somme des deux premières).
Plus précisément, $\operatorname{im} f = \mathbb{Z}(1,0,1,0) \oplus \mathbb{Z}(0,1,0,1)$.

Et ce sous-groupe est facteur direct : calculer par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

On voit de manière analogue que g est de rang 1 (la matrice $M(g)$ est non nulle, et ses deux lignes sont égales). Ici, $\operatorname{im} g = \mathbb{Z}(1,1)$, diagonale qui est notoirement facteur direct.

La suite exacte (6) a donc toutes les propriétés de celle de l'**exercice 2)**, avec

$$H_2(Z) = A\,, \qquad H_1(Z) = B\,, \qquad H_0(Z) = C\,.$$

On conclut que $$H_p(Z) \cong \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \geq 3 \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad p = 2 \\ \mathbb{Z}^4 & \text{si} \quad p = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad p = 0 \end{cases}.$$

0.4 Exercice 4)

a) Le cylindre $X \times I = S^1 \times I$ a pour bord $X \times \partial I = S^1 \times \{0,1\}$.
Le cercle inférieur $S^1 \times \{0\}$ s'identifie (exactement ! car $f = \mathrm{id}_{S^1}$) à $Y = S^1$.
Le cercle supérieur $S^1 \times \{1\}$ ne s'identifie à $Y = S^1$ qu'après le “retournement” $g : z \mapsto \overline{z}$.
Au bout du compte, on peut “oublier Y” : tout se passe comme si on avait simplement identifié $S^1 \times \{0\}$ à $S^1 \times \{1\}$ via l'application $\widehat{g} : S^1 \times \{0\} \to S^1 \times \{1\} : (z,0) \mapsto (\overline{z}, 1)$.
Et l'on sait bien que le résultat de cette identification est la bouteille de Klein.

Si l'on souhaite s'exprimer de façon plus formelle, considérer le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
I \times I \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\phi"'] & X \times I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, "\psi|_{X\times I}"] & (X \times I) \coprod Y \arrow[d, "\psi"] \\
K \arrow[r, "\approx", "\alpha"'] & K' \arrow[r, dotted, "\omega"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

avec $\varepsilon : I \times I \to X \times I = S^1 \times I : (x,y) \mapsto (e^{2\mathrm{i}\pi x}, y)$, les deux espaces de gauche sur la seconde ligne étant les quotients définis respectivement par les seules conditions

$$
\begin{array}{rl}
\phi(x,0) = \phi(1-x,1) \quad \text{et} \quad \phi(0,y) = \phi(1,y) & \text{pour tout} \quad (x,y) \in I^2 \,; \\
\chi(z,0) = \chi(\overline{z},1) & \text{pour tout} \quad z \in X = S^1 \,.
\end{array}
$$

On sait que ϕ définit K comme étant la bouteille de Klein. (Voir, ici, l'**exercice 1)**.)
L'existence d'un unique homéomorphisme $\alpha : K \to K'$ fermant le carré de gauche se vérifie trivialement. (La “version” de la bouteille de Klein évoquée en haut de page est K'.)
Pour expliciter ψ, convenons de noter z_X (*resp.* z_Y) l'élément $z \in S^1$ lorsqu'il apparaît “à gauche” en tant que $(z_X, y) \in S^1 \times I = X \times I$ (*resp.* “à droite” en tant que $z_Y \in S^1 = Y$).
Le quotient Z est alors défini par les seules conditions

$$\psi(z_X, 0) = \psi(z_Y) = \psi(\overline{z_X}, 1) \quad \text{pour tout} \quad z \in S^1 \,.$$

On observe en particulier que $\psi|_Y$ est un homéomorphisme sur son image $Y' \approx S^1$; que

$$\psi|_{X\times\{0\}} : X \times \{0\} \to Y' \qquad \text{et} \qquad \psi|_{X\times\{1\}} : X \times \{1\} \to Y'$$

sont également des homéomorphismes ; de même que $\psi|_{X\times]0,1[} : X \times]0,1[\to Z \smallsetminus Y'$.
On déduit de ces trois derniers homéomorphismes que $\psi|_{X\times I} : X \times I \to Z$ est surjectif.
En outre il est immédiat que

$$\forall\, ((z,y),(z',y')) \in (X \times I)^2 \qquad [\chi(z,y) = \chi(z',y')] \Longleftrightarrow [\psi(z,y) = \psi(z',y')] \,.$$

On dispose donc d'une bijection continue $\omega : K' \to Z$.
Comme K' est un compact, il suffit de vérifier que Z est séparé pour conclure.
Cette vérification se fait de façon élémentaire (et quelque peu fastidieuse), en trois cas :

$$
\begin{array}{rlll}
\psi(z_X, t) \neq \psi(z'_X, t') & \text{avec} \quad (z,z') \in X^2 & \text{et} & (t,t') \in I^2 \,; \\
\psi(z_X, t) \neq \psi(z'_Y) & \text{avec} \quad (z,z') \in X^2 & \text{et} & t \in I \,; \\
\psi(z_Y) \neq \psi(z'_Y) & \text{avec} \quad (z,z') \in X^2. & &
\end{array}
$$

Les détails sont abandonnés au patient lecteur (*resp.* lectrice).

b) Il suffit de se référer au résultat bien connu

$$H_k(X) \cong H_k(Y) \cong H_k(S^1) \cong \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \geq 2 \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$

pour écrire la suite (1) de l'énoncé :

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_1(Y) \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_0(Y)$$

(ainsi réduite car tous ses termes plus à gauche sont nuls) sous la forme

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_* - g_*} \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_* - g_*} \mathbb{Z}\,. \tag{7}$$

Le fait que Z soit (homéomorphe à) la bouteille de Klein a été montré au **a)**.

De $f = \mathrm{id}_{S^1} : S^1 = X \longrightarrow Y = S^1$ on déduit que

$$\begin{array}{rcccc} f_* = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} & : & \mathbb{Z} \cong H_0(X) \cong H_0(S^1) & \longrightarrow & H_0(S^1) \cong H_0(Y) \cong \mathbb{Z} \\ & & \text{et} & & \\ f_* = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} & : & \mathbb{Z} \cong H_1(X) \cong H_1(S^1) & \longrightarrow & H_1(S^1) \cong H_1(Y) \cong \mathbb{Z}\,. \end{array}$$

De $g : S^1 = X \longrightarrow Y = S^1 : z \mapsto \overline{z} = z^{-1}$ on déduit que

$$\begin{array}{rcccc} g_* = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} & : & \mathbb{Z} \cong H_0(X) \cong H_0(S^1) & \longrightarrow & H_0(S^1) \cong H_0(Y) \cong \mathbb{Z} \\ & & \text{mais} & & \\ g_* = -\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} & : & \mathbb{Z} \cong H_1(X) \cong H_1(S^1) & \longrightarrow & H_1(S^1) \cong H_1(Y) \cong \mathbb{Z}\,. \end{array}$$

En effet, en degré 0, il ne s'agit que de l'inclusion de composantes connexes par arcs (la même au départ et à l'arrivée !), tandis que l'égalité $\deg g = -1$ est célèbre.

En reportant dans (7), on obtient bien

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[f_* - g_*]{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[f_* - g_*]{0} \mathbb{Z}\,.$$

On en déduit aussitôt que $H_2(Z) = 0$ puisque la multiplication par 2 est injective.

Le reste de la suite se "dévisse" en

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/2 \arrow[dr, tail] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times 2"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[u, two heads] \arrow[r] & H_1(Z) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathbb{Z} \arrow[ur, tail, "\times 2"'] & & \mathbb{Z} \arrow[ur, tail, "\cong"'] & &
\end{tikzcd}$$

(où les flèches $\rightarrowtail$ indiquent des injections et les flèches $\twoheadrightarrow$, des surjections).

On y voit en particulier la suite nécessairement scindée

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,,$$

qui permet d'affirmer que $H_1(Z) \cong (\mathbb{Z}/2) \oplus \mathbb{Z}$.

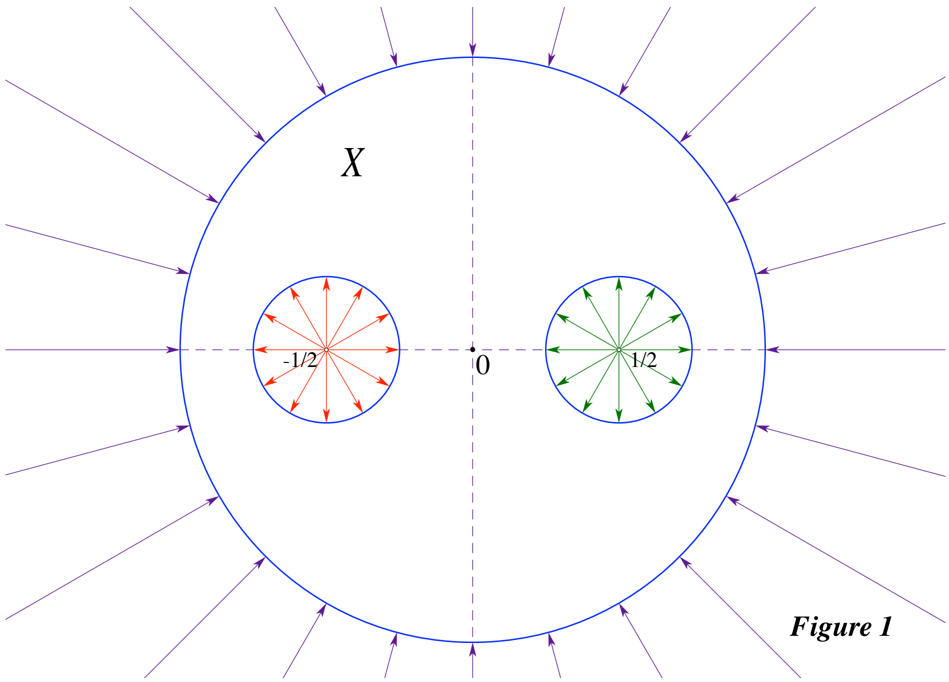

Figure 1

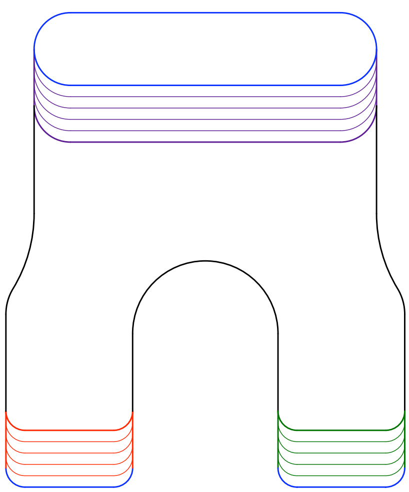

Figure 2

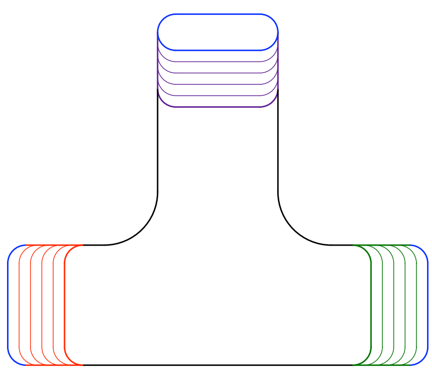

Figure 3