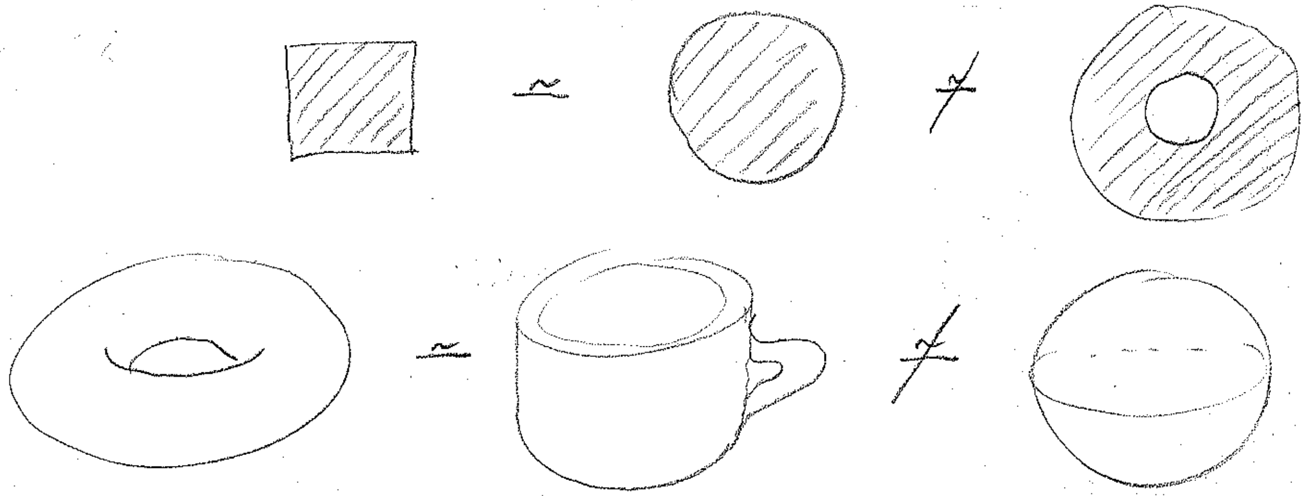
Topologie algébrique

Introduction

topologie algébrique = "géométrie du caoutchouc"



Plus précisément, on s'intéresse aux propriétés des objets géométriques préservées par <u>homéomorphisme</u>.

Méthode :

objet géom. X	homéomorphisme $X \xrightarrow{\simeq} Y$
$\downarrow$	$\downarrow$
objet algébrique $G(X)$ (p.ex. un groupe)	isomorphisme $G(X) \simeq G(Y)$ (p.ex. de groupes)

D'où un moyen de distinguer les objets non homéo. :
$G(Y)$ non isom. à $G(Z)$ $\Longrightarrow$ Y non homéom. à Z.

Plan : I. Groupe fondamental et revêtements

II. Homologie et cohomologie.

D'abord : objet géom. = espace topologique.

0. Rappels et compléments sur les espaces topologiques

0.1 Notions de base

Déf : Soit X un ensemble. Une <u>topologie sur X</u> est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X, appelées les <u>ouverts</u> pour $\mathcal{T}$, tel que

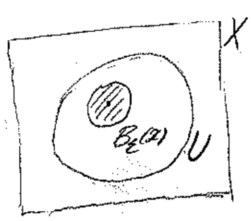
a) X et $\emptyset$ sont des ouverts ;

b) pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts, la réunion $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert ;

c) pour toute famille <u>finie</u> $(U_j)_{j\in J}$ d'ouverts, l'intersection $\bigcap_{j\in J} U_j$ est un ouvert.

Un <u>espace topologique</u> X est un ensemble muni d'une topologie.
Il est dit <u>discret</u> si toute partie de X est ouverte.

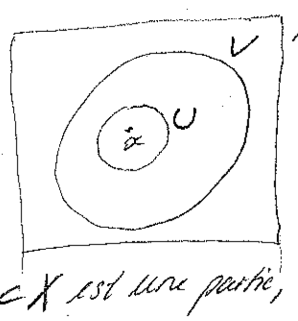
Exemple : Tout espace métrique X est un espace topologique (une partie est ouverte ssi avec tout point $x\in X$, elle contient une boule ouverte $B_\varepsilon(x) := \{y\in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$).
En particulier, l'espace $\mathbb{R}^n$ avec la distance euclidienne est un espace topologique.



Déf : Soit X un espace topologique. Un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X est une <u>base</u> pour la topologie de X si tout ouvert est réunion de parties appartenant à $\mathcal{B}$.

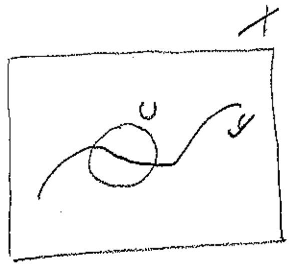
Exemple : Dans un espace métrique, les boules $B_\varepsilon(x)$, $x\in X$, $\varepsilon>0$, forment une base de la topologie (par définition des ouverts).

Déf : Soit X un espace topologique. Un <u>voisinage</u> d'un point $x\in X$ est un ensemble V qui contient un ouvert contenant x. Une partie de X est <u>fermée</u> si son complémentaire est ouvert. Si $A\subset X$ est une partie, son <u>intérieur</u> $\mathring{A}$ est la réunion des ouverts contenus dans A et son <u>adhérence</u> $\bar{A}$



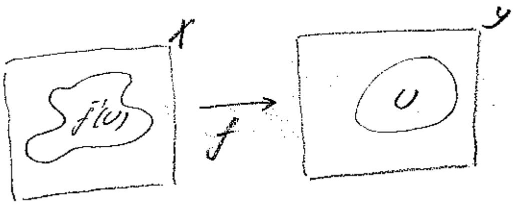
est l'intersection des fermés contenant A.

Déf : Soient X un espace topologique et $Y \subset X$ une partie.
La *topologie induite* sur Y a pour ouverts les parties $U \cap Y$, où U est ouvert dans X.
Un *sous-espace topologique* de X est une partie $Y \subset X$ munie de la topologie induite.



Exemple : Toute partie de $\mathbb{R}^n$ munie de la topologie induite.

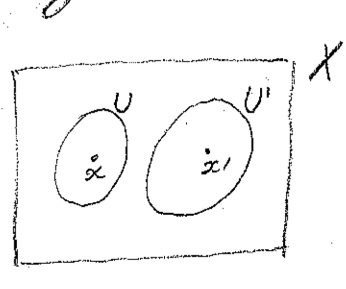
Déf : Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application entre espaces topologiques.
f est *continue* si, pour tout ouvert U de Y, l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est ouverte dans X.



f est un *homéomorphisme* si
f est bijective et *f et f^{-1}* sont continues.
X et Y sont *homéomorphes* s'il existe un homéom. $f : X \longrightarrow Y$.
Dans ce cas, on écrit $X \cong Y$.

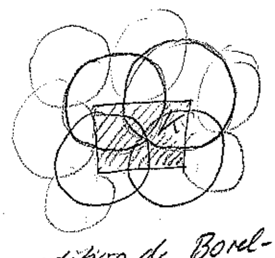
Exercice : M.q. le carré $[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ est homéomorphe au disque fermé $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$.

Déf : Un espace topologique X est *séparé* si pour tout couple de points distincts $x \neq x'$ de X, il existe des voisinages disjoints U de x et U' de x'.



Exemple : Tout espace métrique est séparé.
Tout ss-espace d'un espace séparé est séparé.

Déf : Soit X un espace topologique. Une partie $K \subset X$ est <u>quasi-compacte</u> si, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe une sous-famille <u>finie</u> $(U_i)_{i \in J}$ telle que $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.



condition de Borel-Lebesgue

K est <u>compact</u> si K est quasi-compact et séparé (pour la topologie induite).

Exemple : Une partie de $X = \mathbb{R}^n$ est compacte ssi elle est fermée et bornée. De même si X est un espace métrique complet quelconque.

Prop. 1 : Soient X et Y des espaces topologiques.

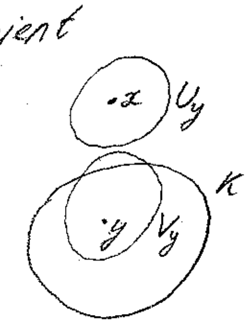
a) Si X est quasi-compact, tout fermé de X est quasi-compact.

b) Si X est séparé, tout quasi-compact de X est fermé.

c) Si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et $K \subset X$ quasi-compact, alors $f(K) \subset Y$ est quasi-compact.

Dém. : a) Soit $F \subset X$ un fermé, U son complémentaire et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts telle que $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Alors $X = U \cup \bigcup_{i \in I} U_i$. Comme X est quasi-compact, il existe une sous-famille finie $(U_i)_{i \in J}$ telle que $X = U \cup \bigcup_{i \in J} U_i$. Mais alors, on a $F \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

b) Soit $K \subset X$ quasi-compact et $x \in X \setminus K$. Montrons que x a un voisinage ouvert contenu dans $X \setminus K$. Pour tout point $y \in K$, soient U_y et V_y des voisinages disjoints de x et y. Alors K est contenu dans la réunion des V_y, $y \in K$. Donc il existe une partie finie $K_0 \subset K$ telle que K est contenu dans la réunion des V_y, $y \in K_0$. Mais alors x est contenu dans l'intersection finie de U_y, $y \in K_0$, et cette intersection est un voisinage de x dans $X \setminus K$.



c) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que $f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

Alors K est contenu dans $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$.
Comme f est continue, les $f^{-1}(U_i)$ sont ouverts. Donc il existe une partie finie $J \subset I$ telle que K est contenu dans $\bigcup_{i\in J} f^{-1}(U_i)$.
Mais alors $f(K)$ est contenu dans la réunion des U_i, $i \in J$. ✓

Thm 2 : Si $f : X \to Y$ est une application continue et bijective entre espaces topologiques tels que X est quasi-compact et Y séparé, alors f est un homéomorphisme.

Exemple : Si $f : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow D$ est une application continue et bijective du carré $[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ sur le disque fermé $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$, f est un homéomorphisme.

Dém. du thm : Il s'agit de montrer que f^{-1} est continue. Soit U un ouvert de X. Nous avons $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$. Comme f est bijective, nous avons $Y \setminus f(U) = f(X\setminus U)$. La partie $X \setminus U$ est fermée dans X donc quasi-compact (Prop 1 a). Donc son image $f(X\setminus U)$ est quasi-compact dans Y (Prop 1 c). Comme Y est séparé, il s'ensuit que $f(X\setminus U)$ est fermé (Prop 1 b).
Donc $Y\setminus f(U) = f(X\setminus U)$ est fermé et $f(U)$ est bien ouvert. ✓

Lemme et définition 3 : Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors les parties $U\times V$, où U est ouvert dans X et V ouvert dans Y, forment la base d'une topologie sur $X\times Y$ appelée la <u>topologie produit</u>.
<u>L'espace produit</u> est l'ensemble $X\times Y$ muni de cette topologie.
Une application $f : Z \longrightarrow X\times Y$ entre espaces topologiques est continue ssi les compositions $p_X \circ f : Z \longrightarrow X$ et $p_Y \circ f : Z \longrightarrow Y$ sont continues.

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X\times Y \arrow[r, "p_Y"'] \arrow[d, "p_X"'] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

Dém. : Exercice !

Thm 4 : Le produit de deux espaces quasi-compacts est quasi-compact.