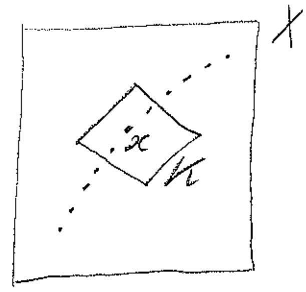
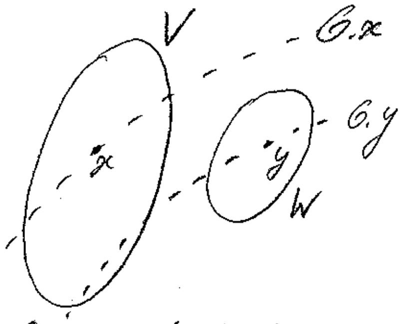
Dém. de la prop. 1 : Soit $x \in X$. Soit K un voisinage compact de x.
Alors la partie $\{g \in G \mid (g.K) \cap K \neq \emptyset\}$ est finie.



Donc l'intersection $G.x \cap K$ est finie. Comme K est séparé, l'intersection $G.x \cap K$ est fermée et discrète dans K. Par le lemme 0, l'orbite $G.x$ est donc fermée et discrète dans X. On sait déjà que la relation $\underset{G}{\sim}$ est ouverte. Il suffit donc de montrer que son graphe est fermé (Prop. 0.3.2).
Soit donc (x,y) un point du complémentaire du graphe de $\sim_G$.
Les orbites $G.x$ et $G.y$ sont donc distinctes.



Soit W un voisinage compact de y tel que $G.x \cap W = \emptyset$ (qui existe puisque $G.x$ est fermé et X localement compact). Soit V un voisinage de x. L'ensemble $A = \{g \in G \mid g.(V \cup W) \cap (V \cup W) \neq \emptyset\}$ est fini par l'hypothèse de propreté. Donc la partie $\bigcup_{g \in A} g.W$ est fermée.
Alors la partie
$$U = V \setminus \Big(V \cap \bigcup_{g \in A} g.W\Big)$$
est un voisinage de x et $U \times W$ ne rencontre pas le graphe de $\sim_G$ (i.e. $G.y \neq G.z$ pour tous $y \in U$ et $z \in W$). ✓

Déf : L'action d'un groupe G sur un espace top. X est <u>libre</u> si les stabilisateurs de tous les points de X sont triviaux.

Rque : Si x est un point de X, on a la bijection
$$\begin{aligned} G/G_x &\xrightarrow{\ \sim\ } G.x \\ gG_x &\longmapsto g.x \end{aligned}$$
où G/G_x est l'ensemble des classes (à droite) modulo G_x.

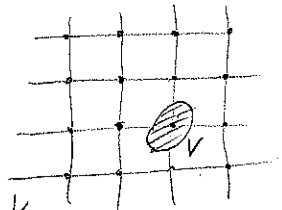
(cette application est surjective par définition de $G.x$ et injective puisque, pour tous $g, h \in G$, on a

$$g.x = h.x \iff g^{-1}h.x = x \iff g^{-1}h \in G_x \iff hG_x = gG_x \text{).}$$

Donc l'action est libre ssi, pour tout $x \in X$, l'application

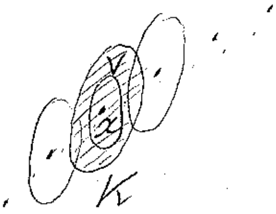
$$G \longrightarrow G.x, \quad g \longmapsto g.x$$

est bijective. Par exemple, l'action de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par translations est libre.



Prop. 2 : Soit G un groupe discret qui agit proprement et librement sur un espace localement compact X. Alors tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert V tel que $(g.V) \cap V = \emptyset$ pour tout $g \neq e$ dans G.

Dém. : L'orbite $G.x$ est discrète (Prop. 1) et X est localement compact. Il existe donc un voisinage compact K de x tel que $K \cap G.x = \{x\}$. L'ensemble



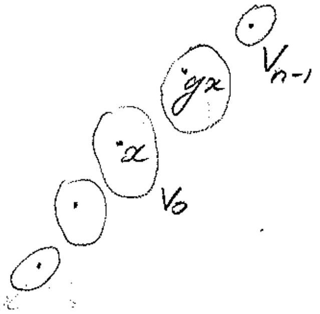
$$A = \{ g \in G \mid (g.K) \cap K \neq \emptyset \}$$

est fini. Comme l'action est libre, on a $x \notin g.K$ pour tout $g \neq e$. Donc $W := K \setminus \bigcup_{g \in A \setminus \{e\}} g.K$ est un voisinage de x. On a $gW \cap W = \emptyset$ pour $g \neq e$ par construction de W. On prend pour V un voisinage ouvert contenu dans W. ✓

Déf : L'action d'un groupe discret G sur un espace localement compact X est <u>proprement discontinue</u> si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert V tel que $(g.V) \cap V = \emptyset$ pour tout $g \neq e$ dans G.

Exemples : 1) Les actions de la Prop. 2.

2) Soit G un groupe fini qui agit librement sur un espace séparé X. Alors l'action est proprement discontinue.
En effet, soient $x \in X$ et $G = \{e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$. Alors on peut séparer les points de l'orbite $G.x = \{x, g_1x, \dots, g_{n-1}x\}$ par des ouverts $V_0, \dots, V_{n-1}$. Alors



$$V = V_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} V_i$$

est un voisinage ouvert de x et

$$(g_i V) \cap V \subseteq V_i \cap V_0 = \phi.$$

Exemple : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit librement sur $X = \mathbb{C}^*$ par $z \longmapsto -z$.
On a un homéomorphisme $\mathbb{C}^*/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*$ induit par $z \longmapsto z^2$.

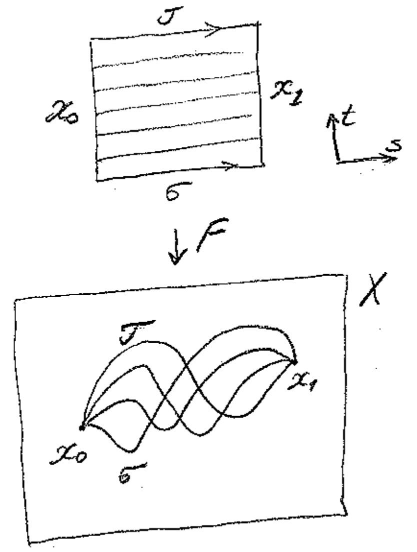
1. Groupe fondamental et revêtements

1.1 Homotopie des chemins et groupe fondamental

Soit X un espace topologique. Notons I l'intervalle $[0,1]$.
Soit X un espace topologique et σ et τ deux chemins

Déf : Soient x_0 et x_1 deux points de X et σ et τ deux chemins de x_0 à x_1. Une <u>homotopie à extrémités fixes</u> entre σ et τ est une application continue

$$F : I \times I \longrightarrow X$$



telle que

(1) $F(s,0) = \sigma(s) \quad \forall s \in I$
(2) $F(s,1) = \tau(s) \quad \forall s \in I$
(3) $F(0,t) = x_0 \quad \forall t \in I$
(3) $F(1,t) = x_1 \quad \forall t \in I$

S'il existe F, on écrit $\sigma \simeq \tau$ rel ∂I et on dit que σ et τ sont <u>homotopes</u> (à extrémités fixes ou relativement à $\partial I = \{0,1\}$).

Lemme O : Soient X un espace topologique et F, G deux fermés de X tels que $X = F \cup G$.
Soient Y un esp. top. et

$$f : F \longrightarrow Y \text{ et } g : G \longrightarrow Y$$

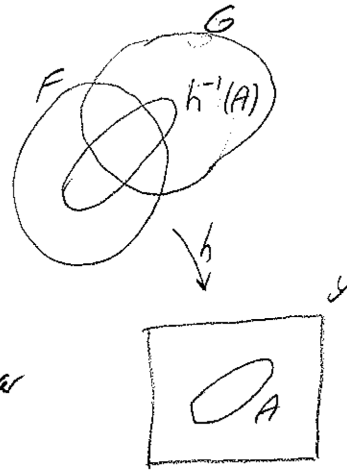
deux applications continues telles que

$$f|_{F \cap G} = g|_{F \cap G}.$$

Alors l'application $h : X \longrightarrow Y$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in F \\ g(x) & x \in G \end{cases}$$

est continue.



Dém. : Il suffit de montrer que $h^{-1}(A)$ est fermé pour toute partie fermée A de Y. Or nous avons

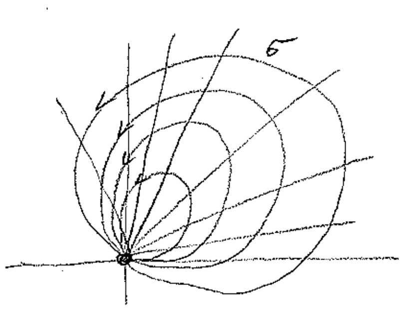
$$\begin{aligned} h^{-1}(A) &= (h^{-1}(A) \cap F) \cup (h^{-1}(A) \cap G) \\ &= f^{-1}(A) \cup g^{-1}(A). \quad \checkmark \end{aligned}$$

Un *lacet* en x_0 est un chemin de x_0 à x_0.

Un lacet est *contractile* s'il est homotope au *lacet constant*, qui est constant de valeur x_0 sur I.

Exemple : Si V est un espace vectoriel réel, tout lacet σ en $x_0 = 0$ est contractile ; on peut utiliser

$$F(s,t) := t\cdot\sigma(s)$$



Lemme 0

Lemme 1 : La relation définie sur l'ensemble des chemins de x_0 à x_1 par

$$\sigma \sim \tau \iff \sigma \simeq \tau \text{ rel } \partial I$$

est une relation d'équivalence.

Dém. : Elle est réflexive ($F(s,t) = \sigma(s), \forall s,t$). Si F est une homotopie à extrémités fixes de σ à τ, alors H défini par

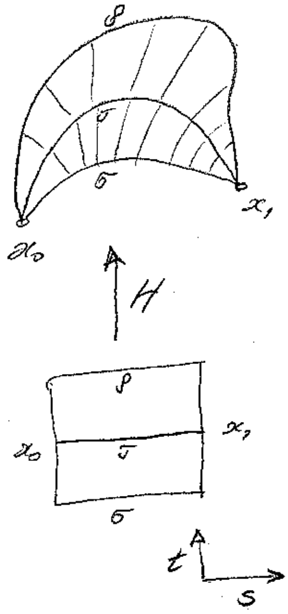
$$H(s,t) := F(s,1-t), \quad \forall s,t \in I,$$

est une homotopie à extrémités fixes de τ à σ. Si $F : \sigma \simeq \tau$ et $G : \tau \simeq \rho$ sont des homotopies à extrémités fixes, alors H définie par

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & , s\in I,\ 0 \le t \le 1/2, \\ G(s,2t-1) & , s\in I,\ 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

est une homotopie à extrémités fixes de σ à ρ. (!).

Donc la relation est symétrique et transitive. ✓



Notation : $[\sigma]$ = classe d'équivalence du chemin σ.

Rappel : Deux chemins σ et τ sont *composables* si $\sigma(1) = \tau(0)$. Dans ce cas, le *chemin composé* $\sigma\tau$ est défini par

$$(\sigma\tau)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & , 0 \le t \le 1/2 \\ \tau(2t-1) & , 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Le *chemin inverse* de σ est le chemin σ^{-1} défini par

$$\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t), \quad t\in I.$$

Notation : e_x = chemin constant en un point $x \in X$.

Prop. et déf. 2 :

a) Soient σ et τ deux chemins composables. Alors la classe $[\sigma\tau]$ ne dépend que de $[\sigma]$ et $[\tau]$.
La <u>composition des classes d'homotopie</u> est définie par

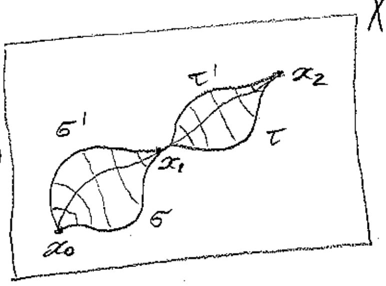
$$[\sigma][\tau] := [\sigma\tau].$$

b) La composition des classes d'homotopie de chemins est associative ; si σ est un chemin de x_0 à x_1, on a $[e_{x_0}][\sigma] = [\sigma] = [\sigma][e_{x_1}]$ et

$$[\sigma][\sigma^{-1}] = [e_{x_0}], \quad [\sigma^{-1}][\sigma] = [e_{x_1}].$$

Dém. : a) Supposons que

$$F : \sigma \simeq \sigma' \text{ rel } \partial I \quad \text{et} \quad G : \tau \simeq \tau' \text{ rel } \partial I.$$

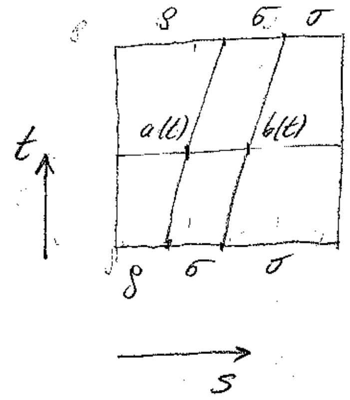


Définissons l'homotopie composée (horizontalement)

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & 0 \leq s \leq 1/2,\ t \in I, \\ G(2s-1,t) & 1/2 \leq s \leq 1,\ t \in I. \end{cases}$$

Alors H est continue (recollement de deux fonctions continues définies sur des fermés de $I \times I$) et donne une homotopie

$$\sigma\tau \simeq \sigma'\tau' \text{ rel } \partial I.$$



b) Soient ρ, σ, τ trois chemins composables. On définit une homotopie à extrémités fixes de $(\rho\sigma)\tau$ à $\rho(\sigma\tau)$ par

$$H(s,t) = \begin{cases} \rho\left(\dfrac{s}{a(t)}\right), & 0 \leq s \leq a(t) \\ \sigma\left(\dfrac{s-a(t)}{b(t)-a(t)}\right), & a(t) \leq s \leq b(t) \\ \tau\left(\dfrac{s-b(t)}{1-b(t)}\right), & b(t) \leq s \leq 1 \end{cases}$$

où $a(t) = 1/4 + t/4$ et $b(t) = 1/2 + t/4$.