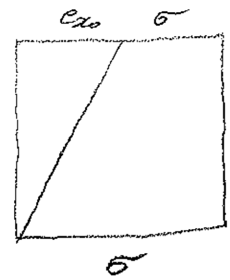
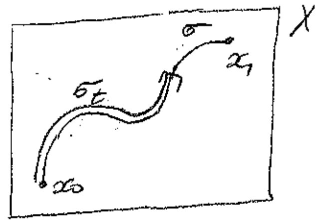
On obtient une homotopie de σ à $e_{x_0}\sigma$ en posant



$$H(s,t) = \begin{cases} x_0 \;, & 0 \leq s \leq t/2 \;,\; t \in I \,, \\ \sigma\left(\frac{s - t/2}{1 - t/2}\right) \;, & t/2 \leq s \leq 1,\; t \in I . \end{cases}$$

De façon analogue, on construit une homotopie de σ à σe_{x_1}.



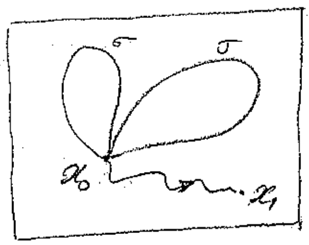
Pour construire une homotopie de e_{x_0} à $\sigma\sigma^{-1}$, notons σ_t, $t \in I$, le chemin obtenu en parcourant σ seulement de $s=0$ à $s=t$:

$$\sigma_t(s) = \begin{cases} \sigma(s) \,, & 0 \leq s \leq t \\ \sigma(t) \,, & t \leq s \leq 1 . \end{cases}$$

Alors

$$H(s,t) = (\sigma_t \, \sigma_t^{-1})(s) \quad , \quad s,t \in I$$

est une homotopie de e_{x_0} à $\sigma\sigma^{-1}$. De façon analogue, on obtient une homotopie de e_{x_1} à $\sigma^{-1}\sigma$. ✓



Déf : Soit $x_0 \in X$. Le groupe fondamental de X en x_0 est le groupe $\pi_1(X, x_0)$ formé des classes d'homotopie de lacets en x_0, dont la multiplication est induite par la composition des lacets.

Rques : 1) L'élément neutre de $\pi_1(X, x_0)$ est la classe de e_{x_0}.

2) Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ dépend en général du choix de x_0.

Cor. 3 : Si les points x_0 et x_1 sont liés par un chemin α, on a l'isomorphisme de groupes

$$\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1) \;,\; [\sigma] \longmapsto [\alpha^{-1}][\sigma][\alpha].$$

Dém. : Il résulte de la Prop. 2 que α_* est un homomorphisme d'inverse α^{-1}_*. ✓

Rque : Donc si X est connexe par arcs, le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est indépendant du choix de x_0 à un isomorphisme (non unique !) près.

Déf. : Un <u>espace topologique pointé</u> est un couple (X, x_0) formé d'un espace topologique X et d'un point $x_0 \in X$. Un <u>morphisme</u> d'espaces topologiques pointés $(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est une application continue $f : X \longrightarrow Y$ t.q. $f(x_0) = y_0$.

Rque : Dans ce cas, on a un homomorphisme de groupes

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad [\sigma] \longmapsto [f \circ \sigma].$$

Clairement, on a

1) Si $X = Y$ et $f = Id_X$, alors $f_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}$ et
2) Si on a des morphismes composables

$$(X, x_0) \xrightarrow[g]{} (Y, y_0) \xrightarrow[f]{} (Z, z_0),$$

alors $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Donc le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est <u>fonctoriel</u> en l'espace topologique pointé (X, x_0). En particulier, si

$$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

est un isomorphisme d'espaces topologiques pointés, alors

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

est un isomorphisme de groupes.

1.2 Homotopie entre applications continues

Déf : Soient Y un espace topologique, $A \subset Y$ un sous-espace et X un espace topologique. Soient deux applications continues

$$f, g : Y \longrightarrow X \quad \text{telles que} \quad f|_A = g|_A .$$

L'application f est <u>homotope à g relativement à</u> A, en symboles

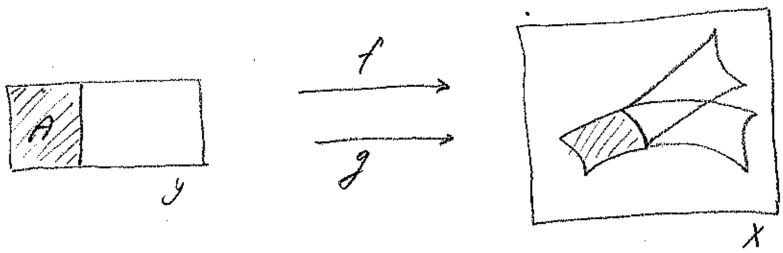
$$f \simeq g \text{ rel } A \quad (\text{resp. } f \simeq g \text{ si } A = \emptyset),$$

s'il existe une application continue $F : Y \times I \longrightarrow X$ telle que

(1) $F(y,0) = f(y), \ \forall y \in Y,$

(2) $F(y,1) = g(y), \ \forall y \in Y,$

(3) $F(y,t) = f(y) = g(y), \ \forall y \in A, \forall t \in I$



Rques : 1) Pour $Y = I = [0,1]$, $A = \partial I = \{0,1\}$, on retrouve la notion d'homotopie des chemins.

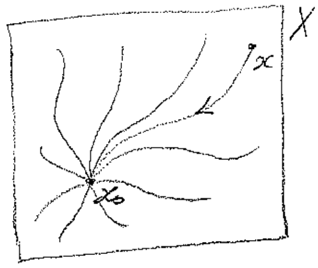
2) Comme pour les chemins, on montre que l'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence compatible avec la composition des applications.

Exemple : Soient V un espace vectoriel réel, $X = Y = V$, $A = \emptyset$, $f = Id_V$, g l'application constante de valeur 0. Alors f est homotope à g par l'homotopie donnée par

$$F(x,t) = tx, \quad x \in V, \ t \in I.$$

Déf : Un espace top. X est <u>contractile</u> si l'identité $Id_X : X \longrightarrow X$ est homotope à une application constante.

Rque : Si $X = \emptyset$, toute application $X \to X$ est constante. Donc $X = \emptyset$ est contractile.



Lemme 1 : a) Tout espace contractile est connexe par arcs.

b) Un espace X est contractile ssi pour tout espace Y, toutes les applications continues de Y dans X sont homotopes.

Dém. : a) Soit F une homotopie de l'identité à l'application constante de valeur $x_0 \in X$. Alors, pour $x \in X$, le chemin

$$I \longrightarrow X, \quad t \longmapsto F(x,t)$$

relie x à x_0.

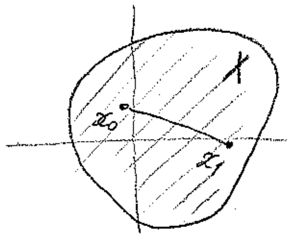
b) "$\Rightarrow$" Supposons que Id_X est homotope à l'application constante $c^X_{x_0}$ de valeur x_0. Soit $f : Y \to X$ une application continue. Alors $f = Id_X \circ f$ est homotope à $c^X_{x_0} \circ f$, qui est l'application constante $c^Y_{x_0}$ de Y dans X de valeur x_0.

"$\Leftarrow$" Si $X = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $x_0 \in X$. L'hypothèse donne que Id_X est homotope à $c^X_{x_0}$. ✓

Exemple : Soit X une partie convexe d'un espace vectoriel réel V (i.e. si $x_0, x_1 \in X$, alors $(1-t)x_0 + tx_1 \in X$ pour tout $t \in [0,1]$). Alors X est contractile car si $f, g : Y \to X$ sont deux applications continues, on a l'homotopie donnée par

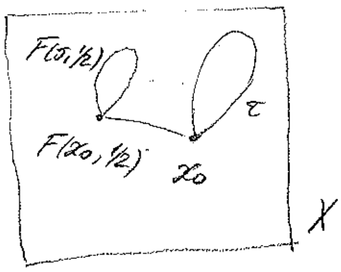
$$F(y,t) = (1-t)f(y) + t \cdot g(y),$$

$y \in Y$, $t \in [0,1]$.



Déf : Un espace topologique est simplement connexe s'il est connexe par arcs et son groupe fondamental est trivial.

Prop. 2 : Tout espace contractile est simplement connexe.



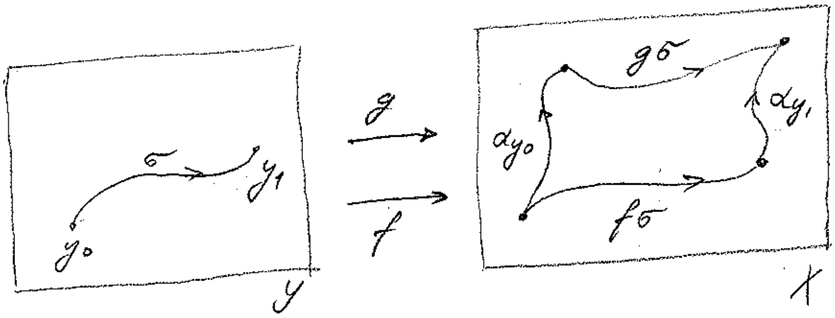
Rque : Si $F : Id_X \simeq c_{x_0}$ est une homotopie contractante, elle donne une homotopie

$$F(\sigma(s),t)\ , \quad s\in I,\ t\in I$$

entre tout lacet σ en x_0 et le lacet constant, mais en général, cette homotopie ne vérifie pas

$$F(\sigma(0),t)=x_0\ ,\ \forall t\in I$$
$$F(\sigma(1),t)=x_0\ ,\ \forall t\in I \quad !$$

Pour montrer la proposition, on se sert d'un lemme :

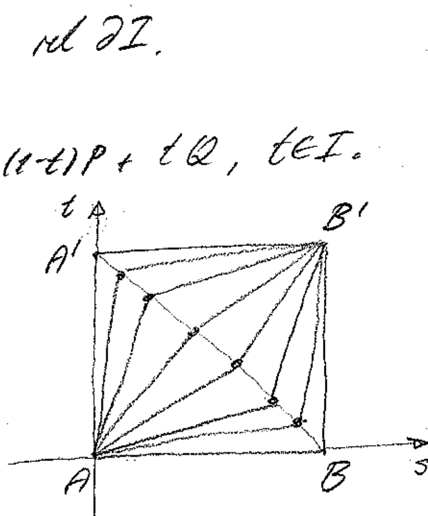


Lemme 3 : Soit $F : f\simeq g$ une homotopie entre applications continues f,g d'un esp. top. Y dans un esp. top. X. Soit $\sigma : I\longrightarrow Y$ un chemin de y_0 à y_1 dans Y. Pour $y\in Y$, soit α_y le chemin $t\longmapsto F(y,t)$, $t\in I$.

Alors $$f\sigma * \alpha_{y_1} \simeq \alpha_{y_0} * g\sigma \quad \text{rel } \partial I.$$

Dém. : Pour $P,Q\in I\times I$, notons σ_{PQ} le chemin $t\longmapsto (1-t)P+tQ$, $t\in I$. Alors l'application

$$G : I\times I \longrightarrow Y,\ (s,t)\longmapsto F(\sigma(s),t)$$



envoie $\sigma_{AB} * \sigma_{BB'}$ sur $f\sigma * \alpha_{y_1}$ et

$\sigma_{AA'} * \sigma_{A'B'}$ sur $\alpha_{y_0} * g\sigma$.

On obtient une homotopie de $f\sigma*\alpha_{y_1}$ à $\alpha_{y_0}*g\sigma$ comme l'image d'une homotopie de $\sigma_{AB}*\sigma_{BB'}$ à $\sigma_{AA'}*\sigma_{A'B'}$. ✓