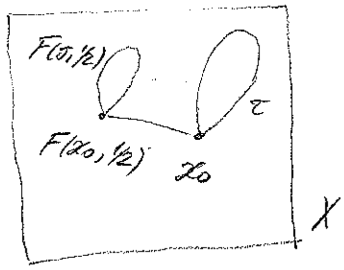
Rque : Si $F : Id_X \simeq c_{x_0}$ est une homotopie contractante, elle donne une homotopie



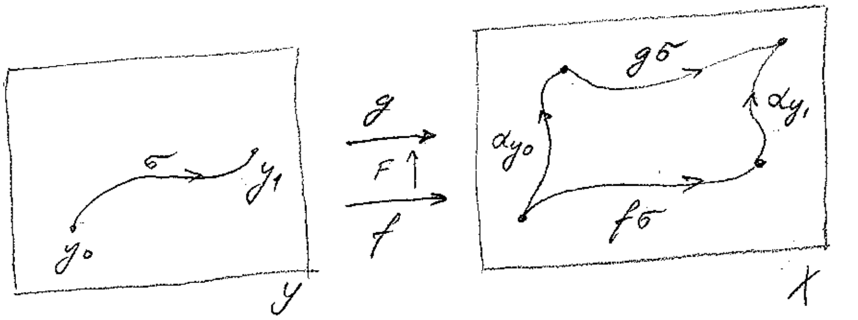
$$F(\sigma(s), t) \;, \quad s \in I,\ t \in I$$

entre tout lacet σ en x_0 et le lacet constant, mais en général, cette homotopie ne vérifie pas

$$F(\sigma(0), t) = x_0 \;, \ \forall t \in I$$

$$F(\sigma(1), t) = x_0 \;, \ \forall t \in I \quad !$$

Pour montrer la proposition, on se sert d'un lemme :

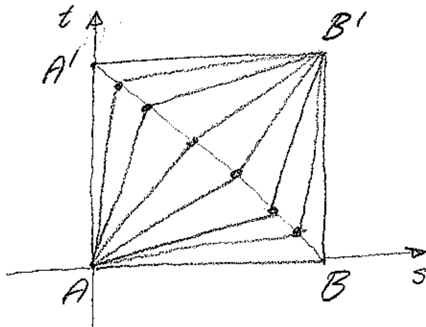


Lemme 3 : Soit $F : f \simeq g$ une homotopie entre applications continues f, g d'un esp. top. Y dans un esp. top. X. Pour $y \in Y$, soit α_y le chemin $t \longmapsto F(y,t)$, $t \in I$. Soit $\sigma : I \longrightarrow Y$ un chemin de y_0 à y_1 dans Y.

Alors $\quad f\sigma * \alpha_{y_1} \simeq \alpha_{y_0} * g\sigma \quad$ rel ∂I.

Dém. : Pour $P, Q \in I \times I$, notons σ_{PQ} le chemin $t \mapsto (1-t)P + tQ$, $t \in I$.
Alors l'application

$$G : I \times I \longrightarrow Y \;, \quad (s,t) \longmapsto F(\sigma(s), t)$$



envoie $\sigma_{AB} * \sigma_{BB'}$ sur $f\sigma * \alpha_{y_1}$ et

$\sigma_{AA'} * \sigma_{A'B'}$ sur $\alpha_{y_0} * g\sigma$.

On obtient une homotopie de $f\sigma * \alpha_{y_1}$ à $\alpha_{y_0} * g\sigma$ comme l'image d'une homotopie de $\sigma_{AB} * \sigma_{BB'}$ à $\sigma_{AA'} * \sigma_{A'B'}$. ✓

Dém. de la Prop. 2 : Si $F : Id_X \simeq c^X_{x_0}$ est une homotopie contractante et σ un lacet en x_0, alors on trouve

$$\sigma * \alpha_{x_0} \simeq \alpha_{x_0} * c^I_{x_0} = \alpha_{x_0}$$

où α_{x_0} est le chemin $t \longmapsto F(x_0, t)$. Donc $[\sigma] = e$ dans $\pi_1(X, x_0)$. ✓

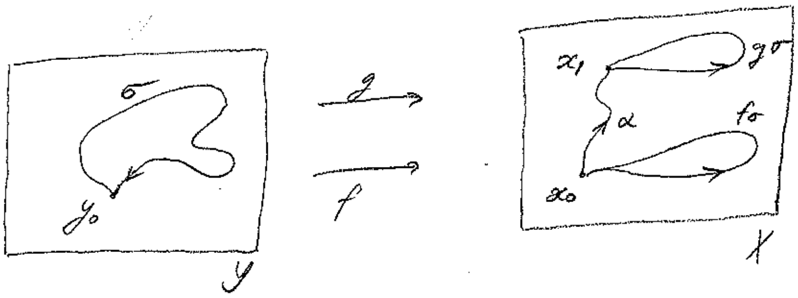
Cor. 4 : Soit $F : f \simeq g$ une homotopie entre applications continues $f, g : Y \longrightarrow X$. Soient $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$, $x_1 = g(y_0)$ et α le chemin de x_0 à x_1 donné par $t \longmapsto F(y_0, t)$.

Alors on a

$$[\alpha]^{-1} \cdot [f\sigma] \cdot [\alpha] = [g\sigma]$$

pour tout $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, bend right, "g_*"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ & \pi_1(X, x_1) \end{tikzcd}$$

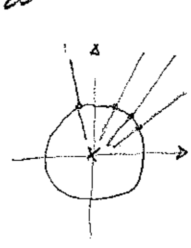


Dém. : C'est une application immédiate du Lemme 3. ✓

Rque : Le corollaire montre en particulier que f_* est un isomorphisme ssi g_* en est un.

Déf : Une application continue $f : Y \longrightarrow X$ est une <u>équivalence d'homotopie</u> s'il existe une appl. continue $f' : X \longrightarrow Y$ telle que $f \cdot f' \simeq Id_X$ et $f' \cdot f \simeq Id_Y$. Les espaces X et Y sont <u>homotopiquement équivalents</u> s'il existe une équiv. d'homotopie entre eux.

Exemples : 1) Un espace non vide X est contractile ssi il est homotopiquement équivalent à l'espace ponctuel $\{*\}$.



2) L'inclusion $S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est une équiv. d'homotopie :

Cor. 5 : Si $f: Y \to X$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, f(y_0))$ est un isomorphisme pour tout $y_0 \in Y$.

Dém. : Soit $f': X \to Y$ tel que $ff' \simeq Id_X$ et $f'f \simeq Id_Y$. Alors la composée $\pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X, f(y_0)) \xrightarrow{f'_*} \pi_1(Y, f'f(y_0))$ est un isom. par le corollaire 4. Donc f_* est inj. et f'_* surjective. Or f'_* est aussi injective. Donc f'_* et f^* sont des isomorphismes. ✓

Cor. 6 : Soit X un espace top. connexe par arcs. Alors on a équivalence entre

i) X est simplement connexe ;

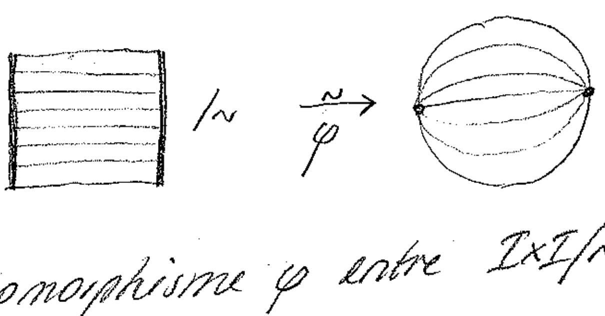
ii) Si σ et τ sont deux chemins dans X allant d'un point x_0 à un point x_1, alors $\sigma \simeq \tau$ rel ∂I ;

iii) toute application continue $S^1 \to X$ s'étend en une application continue $D^2 \to X$.

Dém: i) $\Rightarrow$ ii) La classe $[\sigma]^{-1}[\tau]$ appartient à $\pi_1(X, x_0)$, qui est trivial. Donc on a $[\sigma]^{-1}[\tau] = [\varepsilon_{x_0}]$ et $[\sigma] = [\tau]$. ✓

ii) $\Rightarrow$ i) Soit $x_0 \in X$ (on peut supposer $X \neq \emptyset$) et soit σ un lacet en x_0. Alors ii) implique qu'on a $[\sigma] = [\varepsilon_{x_0}]$. ✓

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur le carré $I \times I$ dont les classes d'équivalence sont les points (s, t) où $s \notin \{0, 1\}$ et les deux segments verticaux $\{0\} \times I$ et $\{1\} \times I$.



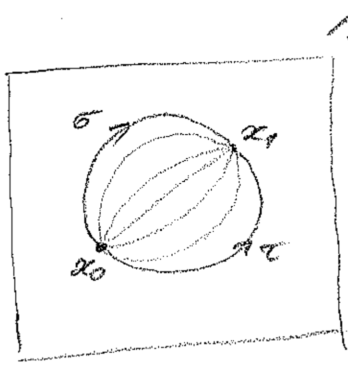
On a un homéomorphisme φ entre $I \times I/\sim$ et D^2 induit par

$$(s,t) \longmapsto (2s-1, (2t-1)\sqrt{1-(2s-1)^2}).$$

Il induit des homéomorphismes entre l'image de la réunion des segments $I \times \{0\}$ et $I \times \{1\}$ et les demi-cercles fermés inférieurs et supérieurs.

Montrons l'implication ii) $\Rightarrow$ iii):

Soit $f : S^1 \to X$ une application continue. Alors les applications définie par $\sigma(s) = f\circ\varphi(s,0)$ et $\tau(s) = f\circ\varphi(s,1)$ sont des chemins allant de $f(-1)$ à $f(1)$.



Si $H : I\times I \longrightarrow X$ est une homotopie à extrémités fixes de σ à τ, elle induit une appl. continue $\bar{H} : I\times I/\sim \longrightarrow X$ et $F = \bar{H}\circ\varphi^{-1}$ est une extension continue de f à D^2.

Montrons l'implication iii) $\Rightarrow$ ii): Soient σ et τ deux chemins allant d'un point x_0 à un point x_1 de X.

Alors en posant
$$g(s,t) = \begin{cases} \sigma(s) & t=0,\ s\in I \\ \tau(s) & t=1,\ s\in I \end{cases}$$
on obtient une application continue $\bar{g} : \partial(I\times I)/\sim \longrightarrow X$ et $f = \bar{g}\circ\varphi^{-1}$ est une application continue $S^1 \longrightarrow X$.
Soit $F : D^2 \longrightarrow X$ une extension continue. Alors $H = F\circ\varphi\circ q$, où q est la projection $I\times I \longrightarrow I\times I/\sim$ est une homotopie à extrémités fixes de σ à τ.

1.3 Le groupe fondamental du cercle

Soit le cercle $S^1 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Théorème 1: L'application $\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S^1, 1)$ qui envoie un entier $n\in\mathbb{Z}$ sur la classe $[\gamma_n]$ t.q. $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $t\in I$, est un isomorphisme de groupes.

Rque: Le lacet γ_n fait n fois le tour du cercle. Nous allons construire un inverse de Φ en "comptant le nombre de tours" que fait un lacet $\gamma : I \longrightarrow S^1$ quelconque.

On se servira du lemme suivant. Soit $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$, et soit $\psi : S^1 \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \log(z)$, où log est la branche principale.

Lemme 2 : a) (relèvement des chemins) Si $\sigma : I \to S^1$ est un chemin de source 1, il existe un unique chemin $\tilde{\sigma} : I \to \mathbb{R}$ de source 0 tel que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.

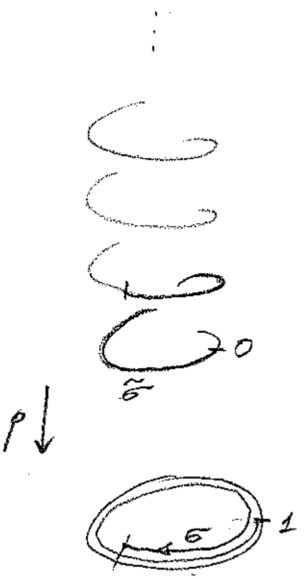
b) (relèvement des homotopies) Si H est une homotopie

$$H : \sigma \simeq \tau \ \text{rel}\ \partial I$$

entre chemins $I \to S^1$ de source 1, il existe une unique homotopie

$$\tilde{H} : \tilde{\sigma} \simeq \tilde{\tau} \ \text{rel}\ \partial I$$

telle que $p \circ \tilde{H} = H$.



Dém. : On montre a) et b) en même temps : Soient

$Y = I$ ou $Y = I \times I$,

$f : Y \to S^1$ égal à σ ou à H,

$0 \in Y$ égal à $0 \in I$ ou à $(0,0) \in I \times I$.

L'espace Y est un espace métrique compact. Donc $f : Y \to S^1$ est uniformément continue : il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$|y - y'| < \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(y')| < 1.$$

En particulier, on a $f(y)/f(y') \neq -1$, de façon que $\psi(f(y)/f(y'))$ est bien défini. Soient des réels $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ tels que $|t_i - t_{i-1}| < \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On pose

$$\tilde{f}(y) = \psi\big(f(t_N y)/f(t_{N-1} y)\big) + \psi\big(f(t_{N-1} y)/f(t_{N-2} y)\big) + \dots + \psi\big(f(t_1 y)/f(t_0 y)\big).$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en tant que composée d'applications continues, on a $p \circ \tilde{f} = f$ (car p est un morphisme de groupes et $p \circ \psi(z) = z$, $\forall z \in S^1 \setminus \{-1\}$)

et $\tilde{f}(0)=0$. Supposons qu'on a $\tilde{f}' : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}'(0)=0$ et $p\cdot\tilde{f}'=f$. Alors $\tilde{f}-\tilde{f}' : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue à valeurs dans $\mathrm{Ker}(p)=\mathbb{Z}$. Comme Y est connexe, l'application $\tilde{f}-\tilde{f}'$ est constante et donc $\tilde{f}=\tilde{f}'$ car $\tilde{f}(0)=\tilde{f}'(0)$.

Pour b), il faut vérifier en plus que $\tilde{H}=\tilde{f}$ est une homotopie à extrémités fixes. En effet, on a

$$p(\tilde{H}(0,t))=0 \ , \ \forall t\in I$$

donc $t\longmapsto \tilde{H}(0,t)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. En outre $\tilde{H}(0,0)=0$, et $t\longmapsto\tilde{H}(0,t)$ continue. Donc $\tilde{H}(0,t)=0$ pour tout t, car I est connexe et
De même pour $t\longmapsto \tilde{H}(1,t)$. ✓

Cor. 3 : Si $\sigma : I \longrightarrow S^1$ est un chemin de source 1, le but $\tilde{\sigma}(1)$ de l'unique relèvement $\tilde{\sigma}$ de σ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\sigma]$.

Rque : Si σ est un lacet (i.e. $\sigma(1)=\sigma(0)=1$), alors $p(\tilde{\sigma}(1))=1$ et $\tilde{\sigma}(1)$ est un entier appelé le <u>nombre d'enroulements</u> (winding number) de $[\sigma]$.

Dém. du théorème 1 : Définissons

$$\chi : \pi_1(S^1,1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

par $\chi([\sigma])=\tilde{\sigma}(1)$. On vient de voir que χ est bien défini. Montrons que χ est un homomorphisme. Soient $[\sigma]$ et $[\tau]$ dans $\pi_1(S^1,1)$. Soient $m=\tilde{\sigma}(1)$ et $n=\tilde{\tau}(1)$. Soit $\tilde{\tau}' : I\longrightarrow\mathbb{R}$ le chemin $s\longmapsto m+\tilde{\tau}(s)$. Il va de m à $m+n$. Le chemin composé $\tilde{\sigma}\cdot\tilde{\tau}'$ est bien défini, part de 0 et vérifie $p(\tilde{\sigma}\tilde{\tau}')=\sigma\tau$. Donc $\tilde{\sigma}\tilde{\tau}'=\widetilde{\sigma\tau}$ et $(\widetilde{\sigma\tau})(1)=(\tilde{\sigma}\tilde{\tau}')(1)=m+n$.

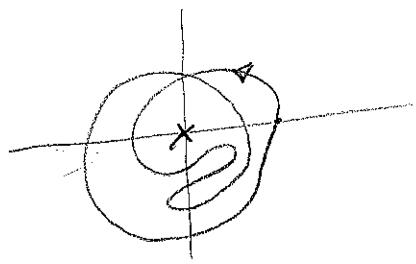
On a donc bien $\mathcal{X}([\sigma][\tau]) = \mathcal{X}([\sigma])\mathcal{X}([\tau])$.

$\mathcal{X}$ est surjectif car pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathcal{X}([\gamma_n]) = (t \mapsto nt)\Big|_{t=1} = n$.

$\mathcal{X}$ est injectif car si $\mathcal{X}([\sigma]) = 0$, alors $\tilde{\sigma}$ est un lacet en 0. Comme $\mathbb{R}$ est simplement connexe, on a une homotopie $H : \tilde{\sigma} \simeq \varepsilon_0$ rel ∂I. Alors $p \circ H$ est une homotopie de σ à ε_1 à extrémités fixes et $[\sigma] = e$.

Il s'ensuit que $\mathcal{X}$ est un isomorphisme d'inverse $n \mapsto [\gamma_n]$ ce qui montre bien le théorème 1. ✓

Rques : 1) Il s'ensuit que l'on a $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$ pour tout espace homotopiquement équivalent à S^1. Par exemple, l'inclusion $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ induit un isomorphisme $\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$. D'où un nombre d'enroulements pour tout lacet de $(\mathbb{C}^\times, 1)$.



lacet au nombre d'enroulements égal à 2.

2) La démonstration du théorème 1 se généralise : on a utilisé seulement les faits suivants :

a) S^1 est un groupe topologique quotient de $G = \mathbb{R}$ par son sous-groupe $H = \mathbb{Z}$;

b) l'action de H dans G (par $h.x = hx$) est proprement discontinue (p. 23)

c) G est simplement connexe.

D'où le théorème suivant (on verra une autre démonstration plus tard)