Thm 5 : Soit G un groupe topologique simplement connexe et $H \subset G$ un sous-groupe discret distingué dans G. Alors on a un isomorphisme canonique
$$\pi_1(G/H, e) \xrightarrow{\sim} H.$$

Dém. : Il reste à voir que si H est discret dans G, l'action $H \times G \to G$, $(h,g) \mapsto hg$ est bien proprement discontinue. En effet, soit U un voisinage ouvert de e dans G tel que $U \cap H = \{e\}$ (il existe puisque H est discret dans G). Soit V un voisinage ouvert de e tel que $VV^{-1} \subseteq U$ (il existe car l'application $G \times G \to G$ qui envoie (g_1, g_2) sur $g_1 g_2^{-1}$ est continue). Alors on a $h.V \cap V = \{e\}$ pour tout $h \in H \setminus \{e\}$ (car $h.v_1 = v_2$ implique $h = v_2 v_1^{-1} \in U \cap H = \{e\}$) ce qui signifie que l'action de H dans G est proprement discontinue. ✓

Rque : Si G est un groupe top. connexe et $H \subset G$ un ss-groupe discret distingué dans G, alors H est central dans G (i.e. $gh = hg$ pour tous $h \in H, g \in G$). En effet, pour tout $h \in H$, l'application $G \to H$, $g \mapsto ghg^{-1}$ est constante car G est connexe et H discret. En particulier, dans le théorème, le groupe $\pi_1(G/H, e)$ est abélien.

Exemple : Pour $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on trouve que $G/H \simeq S^1 \times S^1$ et $\pi_1(S^1 \times S^1, e) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ce fait résulte aussi du théorème suivant

Thm 6 : Soient des espaces top. pointés (X, x_0) et (Y, y_0). On a un isomorphisme canonique
$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Dém. : Soient p_1 et p_2 les projections de $X\times Y$ sur X et Y.
Elles induisent des homomorphismes

$$(p_1)_* : \pi_1(X\times Y, (x_0,y_0)) \longrightarrow \pi_1(X,x_0) \quad \text{et}$$
$$(p_2)_* : \pi_1(X\times Y, (x_0,y_0)) \longrightarrow \pi_2(Y,y_0),$$

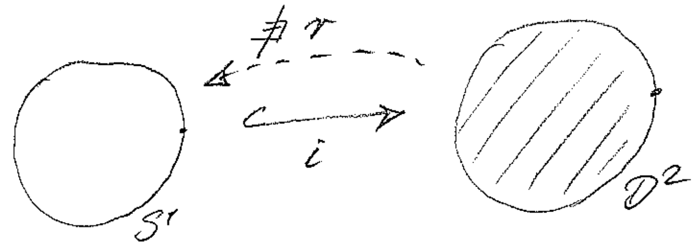
qui donnent lieu à un homomorphisme

$$\pi_1(X\times Y, (x_0,y_0)) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0), \ [\sigma] \longmapsto ([p_1\sigma],[p_2\sigma]).$$

On obtient un homomorphisme inverse en envoyant un couple $([\sigma],[\tau])$ sur la classe d'homotopie du lacet

$$t \longmapsto (\sigma(t),\tau(t)), \quad t\in I. \ \checkmark$$

Thm 7 : Il n'existe pas d'application continue $r : D^2 \longrightarrow S^1$ qui se restreint à l'identité sur S^1 (i.e. le cercle n'est pas un <u>rétract</u> du disque)



Dém. : Soit $i : S^1 \to D^2$ l'inclusion. Si on a $r\circ i = Id_{S^1}$, on a alors, par la fonctorialité du groupe fondamental, $r_*\circ i_* = Id_{\pi_1(S^1,1)}$:

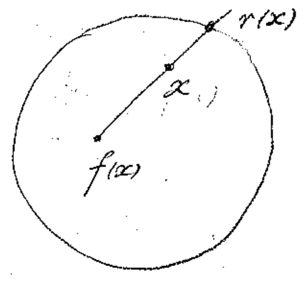
$$\pi_1(S^1,1) \xrightarrow{i_*} \underbrace{\pi_1(D^2,1)}_{=\{e\}} \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1,1), \quad r_*\circ i_* = Id$$

C'est impossible car $\pi_1(S^1,1)\neq\{e\}$ (Thm 1) mais $\pi_1(D^2,1)=\{e\}$ car D^2 est simplement connexe en tant que partie convexe de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. (Exemple, p. 30). $\checkmark$

Cor. 8 : Toute application continue $f : D^2 \longrightarrow D^2$ a un point fixe.

Rque : Ceci est le cas $n=2$ du théorème de Brouwer[1] (qu'on démontrera plus tard pour n quelconque).

Dém. : Supposons que f n'a pas de point fixe. On va en déduire qu'il existe une rétraction continue de l'inclusion $S^1 \hookrightarrow D^2$, en contradiction avec le Thm 7. Pour $x \in D^2$, considérons la droite passant par x et $f(x)$ (comme $x \neq f(x)$, elle est bien définie). Soit $r(x)$ le point d'intersection de cette droite avec le cercle qui est de la forme $(1-t)f(x) + tx$ pour un $t \geq 1$.



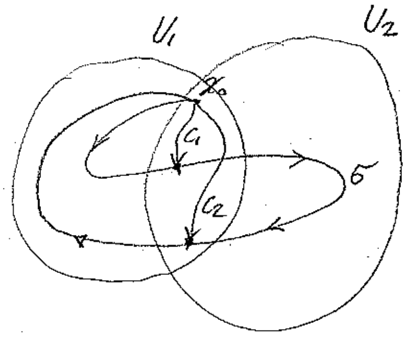
Alors l'application $D^2 \longrightarrow S^1$, $x \longmapsto r(x)$ est la rétraction recherchée. ✓

Thm 9 (forme faible du théorème de Van Kampen) : Soient X un espace topologique, x_0 un point de X et U_1 et U_2 deux ouverts contenant x_0 et tels que

a) $X = U_1 \cup U_2$ et

b) $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs.

Alors $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les images de $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_2(U_2, x_0)$.



Dém. : Soit $\sigma : I \longrightarrow X$ un lacet en x_0. On a $I = \sigma^{-1}(U_1) \cup \sigma^{-1}(U_2)$ et

$$\sigma^{-1}(U_1) = \bigcup_{i \in J_1} I_{1,i} \quad \text{et} \quad \sigma^{-1}(U_2) = \bigcup_{j \in J_2} I_{2,j}$$

pour des familles d'intervalles ouverts $(I_{1,i})_{i \in J_1}$ et $(I_{2,i})_{i \in J_2}$.

---

1) Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881 - 1966, mathématicien néerlandais, actif en topologie de 1909-1913, fondateur de l'intuitionnisme.

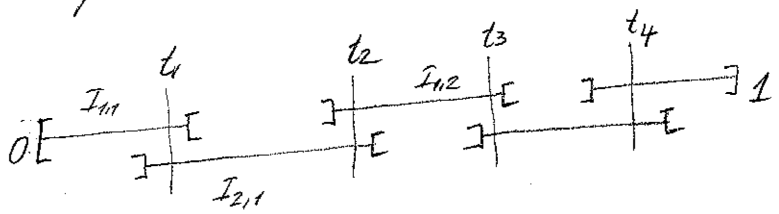
Comme I est compact, il est la réunion d'un nombre fini des intervalles $I_{1,i}$ et $I_{2,i}$. Il existe donc (voir ①) des réels $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ tels que les $\sigma(t_i)$ sont dans $U_1 \cap U_2$ et l'image par σ de chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ est dans U_1 ou dans U_2. Pour chaque t_i, choisissons un chemin c_i de x_0 à $\sigma(t_i)$. Notons σ_i le chemin

$$s \longmapsto \sigma(t_{i-1} + s(t_i - t_{i-1})), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Alors dans le groupoïde des classes d'homotopie de chemins nous avons (nous écrivons σ au lieu de $[\sigma]$ pour simplifier)

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_N \\ &= \sigma_1 c_1^{-1} c_1 \sigma_2 c_2^{-1} c_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{N-1} c_{N-1}^{-1} c_{N-1} \sigma_N \\ &= (\sigma_1 c_1^{-1})(c_1 \sigma_2 c_2^{-1}) \cdots (c_{N-2} \sigma_{N-1} c_{N-1}^{-1})(c_{N-1} \sigma_N) \end{aligned}$$

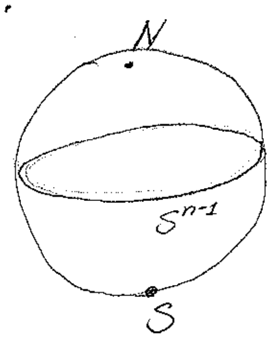
et chacun des facteurs se trouve dans $\pi_1(U_1, x_0)$ ou $\pi_2(U_2, x_0)$.

① 

Cor. 10 : Pour $n \geq 2$, la sphère S^n est simplement connexe.

Dém. : La sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est la réunion des ouverts

$$U_1 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \quad \text{et} \quad U_2 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}.$$



Si $n \geq 2$, l'intersection $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs (en effet, l'inclusion $S^{n-1} \to U_1 \cap U_2$ est une équivalence d'homotopie). Les ouverts U_i sont homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ (projection stéréographique) donc simplement connexes. Donc $\pi_1(S^n)$ est trivial par le thm 9.