Exemple : Considérons $E = S^n$ et $B = S^n/\{\pm \mathrm{Id}\} = \mathbb{P}^n$.
Les seuls automorphismes du revêtement $p : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$
sont induits par $\pm \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ (utiliser le Thm 1 !). Donc $\mathrm{Aut}(E) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Supposons $n \geq 2$. Alors S^n est simplement connexe et localement
connexe par arcs. Donc $\pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$
et tout chemin $\tilde{\sigma}$ menant d'un $v \in S^n$ à $-v$ fournit
un générateur $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$ de $\pi_1(\mathbb{P}^n, p(v))$.

Dém. du corollaire 9 : Notons $\pi = \pi_1(B, b_0)$ et $X = p^{-1}(b_0)$.
Comme E est simplement connexe, on a $\pi_1(E, e_0) = \{e\}$ et
comme E est connexe par arcs, on a un isomorphisme
de G-ensembles

$$\pi = \pi_{e_0} \backslash \pi \xrightarrow{\sim} X.$$

Comme E est localement connexe par arcs, et connexe, B a
les mêmes propriétés, et le Thm 8 nous donne un isomor-
phisme de groupes

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Rev}}(E, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\pi\text{-ens}}(X) = \mathrm{Aut}_{\pi\text{-ens}}(\pi)$$

Finalement, le lemme ci-dessous nous donne le résultat. ✓

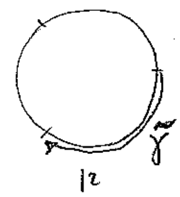
Lemme 10 : Soient G un groupe, X un G-ensemble, H, K des sous-groupes.
a) On a une bijection can. $G\text{-ens}(H\backslash G, X) \xrightarrow{\sim} X^H = \{x \in X \mid xh = x,\ \forall h \in H\}$.
b) $$G\text{-ens}(H\backslash G, K\backslash G) \xleftarrow{\sim} \{Kg \mid gHg^{-1} \subseteq K\} \subseteq K\backslash G$$
c) On a un isomorphisme de groupes
$$G\text{-ens}(H\backslash G, H\backslash G) \xleftarrow{\sim} N_G(H)/H$$
où $N_G(H)$ est le <u>normalisateur</u> de H dans G, i.e. le sous-
groupe des $g \in G$ tels que $gHg^{-1} \subseteq H$.

Rque : Si G est un groupe <u>commutatif</u>, on a donc

$$G\text{-ens}(H\backslash G, K\backslash G) \cong \begin{cases} \emptyset & H \not\subseteq K \\ K\backslash G & H \subseteq K \end{cases}$$

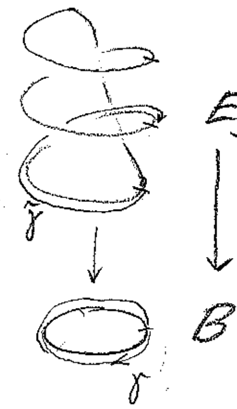
$$G\text{-ens}(H\backslash G, H\backslash G) \cong G/H.$$

Exemple : Pour $n \geq 1$, soit E_n le revêtement $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$.
Soit E_∞ le revêtement $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$.
Alors la fibre au-dessus de $b_0 = 1$ dans S^1 est formée des racines n-ièmes de l'unité



$$Fib(E_n) = \{\zeta \in S^1 \mid \zeta^n = 1\}.$$

Soit $\gamma : t \mapsto e^{2\pi i t}$ "le" générateur de $\pi_1(S^1, 1)$.
Si $\zeta \in Fib(E_n)$, le chemin $\tilde\gamma_\zeta$ qui relève γ et commence en ζ est



$$t \longmapsto \zeta \cdot e^{2\pi i t/n}$$

Son but est $\zeta \cdot \gamma = \zeta \cdot e^{2\pi i/n}$. Donc l'action de $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)$ sur $Fib(E_n)$ est donnée par

$$\zeta \cdot \gamma^m = \zeta \cdot (e^{2\pi i/n})^m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Le stabilisateur de ζ s'identifie à $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ et donc $Fib(E_n)$ s'identifie à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}$-ensemble, où $\mathbb{Z}$ agit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par <u>translations</u> :

$$\bar{x} \cdot m = \overline{x+m}, \quad m \in \mathbb{Z}, \ \bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

En outre, on a $Fib(E_\infty) = \mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}$-ensemble.

Par le Lemme 10 et la remarque, on a

$$\mathrm{Aut}(E_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$\mathrm{Rev}(E_r, E_s) \cong \begin{cases} \phi & \text{si } r\mathbb{Z} \not\subseteq s\mathbb{Z} \text{ (i.e. } s \nmid r) \\ \mathbb{Z}/s\mathbb{Z} & \text{si } r\mathbb{Z} \subseteq s\mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\mathrm{Aut}(E_\infty) \cong \mathbb{Z},$$
$$\mathrm{Rev}(E_r, E_\infty) = \phi, \ \forall r < \infty,$$
$$\mathrm{Rev}(E_\infty, E_r) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$$

Y a-t-il d'autres revêtements connexes de S^1 ?

Soit $E \to S^1$ un revêtement et $\mathrm{Fib}(E)$ sa fibre.

Alors $\mathrm{Fib}(E)$ est un $\mathbb{Z}$-ensemble transitif et donc $\mathrm{Fib}(E) \cong \mathbb{Z}/H$ pour un sous-groupe H de $\mathbb{Z}$.

Or les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont $H=\{0\}$ et $H = n\mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Donc $\mathrm{Fib}(E) \cong \mathbb{Z}$ ou $\mathrm{Fib}(E) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}$-ensemble. Or le revêtement est déterminé à isomorphisme près par sa fibre en tant que G-ensemble (grâce au Thm 8 et la remarque qui le suit). Donc $E \to S^1$ est isomorphe à E_∞ ou E_n pour un $n \geq 1$.

Rque : De façon plus générale, soient B connexe et localement connexe par arcs, $b_0 \in B$, $\pi = \pi_1(B, b_0)$. Si on connaît un revêtement connexe $E \to B$ tel que $\mathrm{Fib}(E) \cong \pi/H$ pour tout ss-groupe H de π, alors on connaît tous les revêtements connexes de B, à isomorphisme près.

Dém. du Lemme 10 : a) Soit X un G-ensemble quelconque.
Soit $f : H\backslash G \longrightarrow X$ un morphisme de G-ensembles.
Soit $\bar{e} = He$ la classe de e dans $H\backslash G$. On a

$$f(\bar{e}).h = f(\bar{e}h) = f(\bar{e}).$$

Donc $f(\bar{e})$ est dans l'ensemble X^H des points fixes de H dans X. Réciproquement, soit $x \in X^H$. Alors on pose

$$f_x(Hg) = x.g.$$

Alors $f_x : H\backslash G \longrightarrow X$ est un morphisme de G-ensembles.

b) Soit $X = K\backslash G$. On a

$$Kg \in X^H \Leftrightarrow Kgh = Kg, \forall h \in H \Leftrightarrow ghg^{-1} \in K, \forall h \in H.$$

c) On a $\{Hg \mid gHg^{-1} \subseteq H\} = N_G(H)/H$. On vérifie que l'application canonique est bien un homomorphisme. ✓

Cor. 11 : Soient $p : E \longrightarrow B$ un revêtement, $b_0 \in B$ et $e_0 \in \pi^{-1}(b_0)$ tel que E est connexe et localement connexe par arcs. Alors on a un isomorphisme canonique

$$\varphi : \mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{\sim} N_{\pi_B}(\pi_E)/\pi_E$$

où $\pi_B = \pi_1(B, b_0)$ et $\pi_E = p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Dém. : Comme celle du corollaire 9 en utilisant le Lemme 10. ✓

Rque : Donc si π_E est distingué dans π_B, alors on a $$\mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{\sim} \pi_B/\pi_E.$$

En outre, on a $\mathrm{Fib}(E) \simeq \pi_B/\pi_E$ et l'action de $\mathrm{Aut}(E)$ sur $\mathrm{Fib}(E)$ correspond à l'action naturelle de π_B/π_E sur lui-même. Cette action est <u>transitive</u>.

Déf : Un revêtement $p: E \to B$ est <u>galoisien</u> si l'action de $\mathrm{Aut}(E)$ sur chaque fibre de p est transitive (i.e. quels que soient $e, e' \in B$ t.q. $p(e) = p(e')$, il existe un autom. g de $E \to B$ tel que $g(e) = e'$).

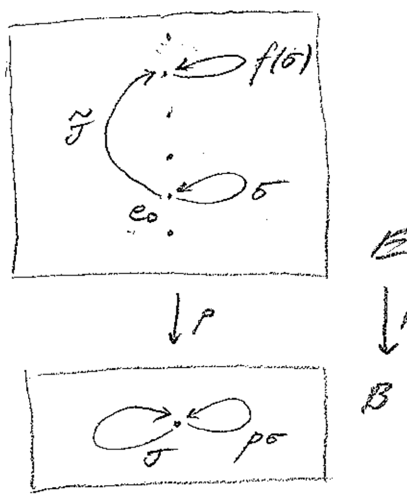
Rque : Un revêtement est donc galoisien s'il est "le plus symétrique possible". Les revêtements $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ et $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ sont galoisiens.

Lemme 12 : Soient $p: E \to B$ un revêtement, $e_0 \in E$ et $b_0 = p(e_0)$.

a) Si p est galoisien, alors $p_*(\pi_1(E, e_0))$ est distingué dans $\pi_1(B, b_0)$.

b) Réciproquement, si $p_*(\pi_1(E, e_0))$ est distingué dans $\pi_1(B, b_0)$ et E est connexe et loc. connexe par arcs, alors $p: E \to B$ est galoisien.

Dém. a) Soient σ un lacet en e_0 et τ un lacet en b_0. Soit $\tilde{\tau}$ le chemin de source e_0 qui relève τ. Soit $f: E \to E$ un automorphisme tel que $e_0 \cdot \tau = f(e_0)$. Alors on a $\tau (p\sigma) \tau^{-1} = p(\tilde{\tau} f(\sigma) \tilde{\tau}^{-1})$ ce qui montre bien que $p_*(\pi_1(E, e_0))$ est distingué.



$\tau \, p\sigma \, \tau^{-1} = p(\tilde{\tau} f(\sigma) \tilde{\tau}^{-1})$

b) Comme E est connexe et localement connexe par arcs, B a les mêmes propriétés et on peut appliquer le Thm 8. On a donc

$$\mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{\sim} N_{\pi_B}(\pi_E) = \pi_B / \pi_E .$$

En outre, la fibre $p^{-1}(b_0)$ est isomorphe à π_B / π_E en tant que G-ensemble et l'action de $\mathrm{Aut}(E)$ sur $\mathrm{Fib}(E)$ correspond à l'action de π_B / π_E sur lui-même. Elle est donc transitive. Comme E est connexe par arcs, pour tout point e_0' de E, le groupe $p_*(\pi_1(E, e_0'))$ est également distingué dans $\pi_1(B, b_0')$, $b_0' = p(e_0')$. Donc l'action de $\mathrm{Aut}(E)$ est transitive sur $p^{-1}(b_0')$ pour tout $b_0' \in B$. ✓

Prop. 13 : Soit G un groupe qui agit de façon proprement discontinue dans un espace topologique E.

a) La projection $p : E \to E/G$ est un revêtement galoisien.

b) Si E est connexe, G est isomorphe à $\mathrm{Aut}(E)$.

c) Si E est connexe et loc. connexe par arcs, G est isomorphe à $\pi_1(E/G) / p_*(\pi_1(E))$.

d) Si E est simplement connexe et loc. connexe par arcs, alors G est isomorphe à $\pi_1(E/G)$.

Rque : Si on applique d) à $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on trouve que $\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ ce qui confirme que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Dém. : a) On sait déjà que $E \to E/G$ est un revêtement.