b) Comme E est connexe et localement connexe par arcs, B a les mêmes propriétés et on peut appliquer le Thm 8. On a donc

$$\mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{\sim} N_{\pi_B}(\pi_E) = \pi_B / \pi_E .$$

En outre, la fibre $p^{-1}(b_0)$ est isomorphe à π_B/π_E en tant que G-ensemble et l'action de $\mathrm{Aut}(E)$ sur $\mathrm{Fib}(E)$ correspond à l'action de π_B/π_E sur lui-même. Elle est donc transitive. Comme E est connexe par arcs, pour tout point e_0' de E, le groupe $p_*(\pi_1(E, e_0'))$ est également distingué dans $\pi_1(B, b_0')$, $b_0' = p(e_0')$. Donc l'action de $\mathrm{Aut}(E)$ est transitive sur $p^{-1}(b_0')$ pour tout $b_0' \in B$. ✓

Prop. 13 : Soit G un groupe qui agit de façon proprement discontinue dans un espace topologique E.

a) La projection $p : E \to E/G$ est un revêtement galoisien.
b) Si E est connexe, G est isomorphe à $\mathrm{Aut}(E)$.
c) Si E est connexe et loc. connexe par arcs, G est con. isomorphe à $\pi_1(E/G)/p_*(\pi_1(E))$.
d) Si E est simplement connexe et loc. connexe par arcs, alors G est isomorphe à $\pi_1(E/G)$.

Rque : Si on applique d) à $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on trouve que $\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ ce qui confirme que $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Dém. : a) On sait déjà que $E \to E/G$ est un revêtement.

Ses fibres sont les orbites de G dans E et bien sûr, G agit transitivement sur chaque orbite.

b) On a un homomorphisme de groupes $G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}(E)$ qui envoie $g \in G$ sur la multiplication par g :

$$\lambda_g : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto gx.$$

L'homomorphisme φ est injectif car l'action est proprement discontinue donc libre. Montrons que φ est surjectif. Soit $x \in E$. Soit $f : E \longrightarrow E$ un automorphisme. Alors $p(f(x)) = p(x)$ et donc il existe $g \in G$ tel que $f(x) = g.x$. Alors λ_g et f relèvent tous les deux $p : E \longrightarrow B$ et coïncident au point x. Comme E est connexe, on doit avoir $\lambda_g = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "\lambda_g = f"] \arrow[r, "p"'] & B = E/G \end{tikzcd}$$

c) On a $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(E)$ par b) et

$$\mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{\sim} \pi_1(E/G) / p_*(\pi_1(E))$$

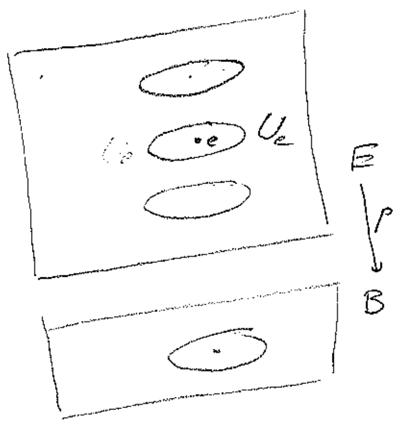
par le Corollaire 11 ($\mathrm{Aut}(E) \xrightarrow{\sim} N_{\pi_B}(\pi_E)$) et le Lemme 12 a) ($\pi_E$ est distingué dans π_B).

d) Résulte de c) car $\pi_1(E, e_0)$ est trivial si E est simplement connexe. ✓

Prop. 14 : Soit $E \xrightarrow{p} B$ un revêtement t.q. E est connexe et loc. connexe par arcs. Alors $\mathrm{Aut}(E)$ agit sur E de façon proprement discontinue. Si $p : E \longrightarrow B$ est galoisien, alors p induit un homéomorphisme $E/G \xrightarrow{\sim} B$ où $G = \mathrm{Aut}(E)$.

Rque : Par la Prop. 13a) et la Prop. 14, les revêtements galoisiens $E \xrightarrow[p]{} B$ (où E est connexe et loc. con. par arcs) sont donc exactement les revêtements de la forme $E \longrightarrow E/G$ où G agit de façon proprement discontinue sur E.

Dém. : Montrons que G agit de façon proprement discontinue. Soit
$e \in E$ et soit U un voisinage de $p(e)$ tel que $p^{-1}(U) \to U$
est trivialisable. Soit U_e le feuillet contenant e.
Soit $g \in G$ un élément différent de Id_E.
Supposons que $g(U_e) \cap U_e$ est non vide. Alors il
existe e' et e'' dans U_e tels que $g(e') = e''$.
Mais alors $p(e') = p(g(e')) = p(e'')$. Comme
les deux sont dans U_e, on a $e' = e''$. Mais



alors $g(e') = e'$. Comme E est connexe, il vient que $g = Id_E$
(Thm 1.4.1). Supposons E galoisien. Alors les orbites de $G = Aut(E)$
dans E sont les fibres de p. Donc l'application $E/G \xrightarrow{\bar{p}} B$
induite par p est bijective. Elle est un homéomorphisme car
E/G et B portent la topologie quotient de E par la relation
dont les classes sont les fibres de p (voir Rque 3) p. 43). ✓

Prochain but : Pour B connexe et loc. connexe par arcs, pour tout π_B-ensemble X, construire, <u>si possible</u>, un revêtement $E \to B$ de fibre X.

1.5 Le revêtement universel

Sauf mention explicite du contraire, les espaces considérés sont supposés localement connexes par arcs.

Thm 1 : Soit un diagramme d'espaces pointés

$$\begin{tikzcd} & (E,e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde f"] \arrow[r, "f"'] & (B,b_0) \end{tikzcd}$$

où $p : E \to B$ est un revêtement et f quelconque, Y connexe. Il existe un relèvement $\tilde f$ de f t.q. $\tilde f(y_0) = e_0$ ssi l'on a

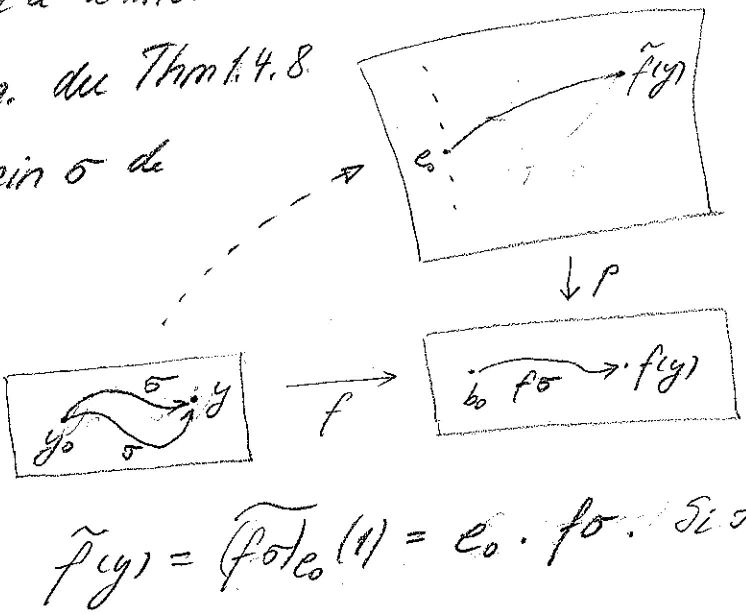
$$f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E,e_0)). \qquad (*)$$

Rque : $\tilde f$ est unique car Y est connexe.

Dém. : S'il existe $\tilde f$, on a, par fonctorialité,

$$f_*(\pi_1(Y,y_0)) = p_* \tilde f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E,e_0)).$$

Réciproquement, supposons que l'on a l'inclusion (*).
On procède comme dans la dém. du Thm 1.4.8
Soit $y \in Y$. On choisit un chemin σ de y_0 à y. On considère le chemin $f\sigma$ et son relèvement $\widetilde{(f\sigma)}_{e_0}$ qui commence en e_0.



On pose $\tilde f(y) = \widetilde{(f\sigma)}_{e_0}(1) = e_0 \cdot f\sigma$. Si σ' est un autre chemin de y_0 à y, on a

$$e_0(f\sigma') = e_0(f\sigma'(f\sigma)^{-1}).\, f\sigma = e_0 \cdot f\sigma$$

car $e_0\, f\sigma'(f\sigma)^{-1} = e_0$ puisque $(f\sigma')(f\sigma)^{-1} = p(\xi)$ pour un lacet

γ en e_0. Donc $\tilde{f}(y)$ est bien défini. Finalement, on montre que $\tilde{f}$ est continue exactement comme dans la démonstration du Thm 1.4.8. ✓

Corollaire 2 : Si dans la situation du théorème, Y est simplement connexe, alors $\tilde{f}$ existe.

Cor. 3 : Si $(E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ et $(E', e_0') \xrightarrow{p'} (B, b_0)$ sont des revêtements simplement connexes, il existe un unique isomorphisme de revêtements $f : E \xrightarrow{\sim} E'$ t.q. $f(e_0) = e_0'$.

Dém. : Par le corollaire 2, il existe des morphismes de revêtements $f : E \to E'$ et $g : E' \to E$ qui envoient e_0 sur e_0' resp. e_0' sur e_0. Par l'unicité des relèvements, on a $f \circ g = Id_{E'}$ et $g \circ f = Id_E$. ✓

Rque : Si $p : E \to B$ est un revêtement et $\pi_B = \pi_1(B, b_0)$, $\pi_E = \pi_1(E, e_0)$, la fibre $Fib(E)$ est isomorphe à π_B / π_E en tant que π_B-ensemble. (car E est supposé connexe). Donc <u>E est simplement connexe ssi sa fibre</u> $Fib(E)$ <u>est isomorphe à</u> π_B. Si E et E' sont simplement connexes, ils ont donc des fibres isomorphes et on a $E \simeq E'$ par le Thm 1.4.8 aussi.