1.5 Le revêtement universel

Sauf mention explicite du contraire, les espaces considérés sont supposés localement connexes par arcs.

Thm 1 : Soit un diagramme d'espaces pointés

$$\begin{tikzcd} & (E,e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (B,b_0) \end{tikzcd}$$

où $p : E \longrightarrow B$ est un revêtement et f quelconque, Y connexe.
Il existe un relèvement $\tilde{f}$ de f t.q. $\tilde{f}(y_0) = e_0$ ssi l'on a

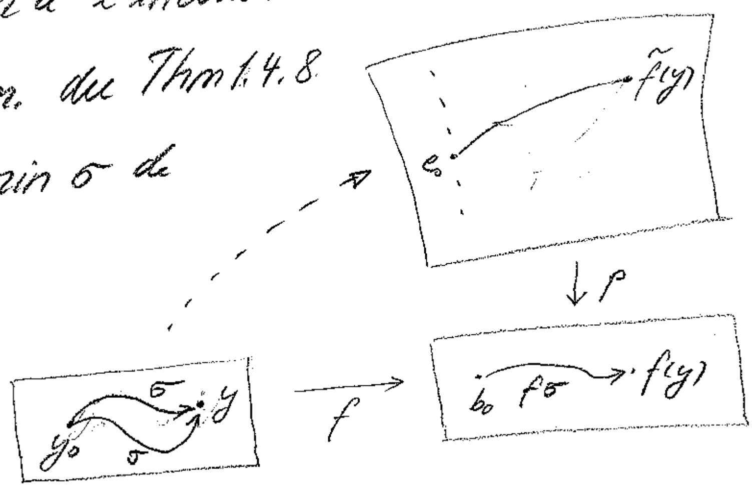
$$f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E,e_0)). \qquad (*)$$

Rque : $\tilde{f}$ est unique car Y est connexe.

Dém. : S'il existe $\tilde{f}$, on a, par fonctorialité,

$$f_*(\pi_1(Y,y_0)) = p_* \tilde{f}_* (\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E,e_0)).$$

Réciproquement, supposons que l'on a l'inclusion $(*)$.
On procède comme dans la dém. du Thm 1.4.8.
Soit $y \in Y$. On choisit un chemin σ de y_0 à y. On considère le chemin $f\sigma$ et son relèvement $\widetilde{f\sigma}_{e_0}$ qui commence en e_0. On pose $\tilde{f}(y) = \widetilde{f\sigma}_{e_0}(1) = e_0 \cdot f\sigma$. Si τ est un autre chemin de y_0 à y, on a



$$e_0(f\tau) = e_0(f\tau(f\sigma)^{-1}) \cdot f\sigma = e_0 \cdot f\sigma$$

car $e_0 f\tau (f\sigma)^{-1} = e_0$ puisque $(f\tau)(f\sigma)^{-1} = p(\xi)$ pour un lacet

δ en e_0. Donc $\tilde{f}(y)$ est bien défini. Finalement, on montre que $\tilde{f}$ est continue exactement comme dans la démonstration du Thm 1.4.8. ✓

Corollaire 2 : Si dans la situation du théorème, Y est simplement connexe, alors $\tilde{f}$ existe.

Cor. 3 : Si $(E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ et $(E', e_0') \xrightarrow{p'} (B, b_0)$ sont des revêtements simplement connexes, il existe un unique isomorphisme de revêtements $f : E \xrightarrow{\sim} E'$ t.q. $f(e_0) = e_0'$.

Dém. : Par le corollaire 2, il existe des morphismes de revêtements $f : E \to E'$ et $g : E' \to E$ qui envoient e_0 sur e_0' resp. e_0' sur e_0. Par l'unicité des relèvements, on a $f \circ g = Id_{E'}$ et $g \circ f = Id_E$. ✓

Rque : Si $p : E \to B$ est un revêtement et $\pi_B = \pi_1(B, b_0)$, $\pi_E = \pi_1(E, e_0)$, la fibre $Fib(E)$ est isomorphe à π_B / π_E en tant que π_B-ensemble. (car E est supposé connexe).
Donc <u>E est simplement connexe ssi sa fibre</u> $Fib(E)$ <u>est isomorphe à</u> π_B. Si E et E' sont simplement connexes, ils ont donc des fibres isomorphes et on a $E \simeq E'$ par le Thm 1.4.8 aussi.

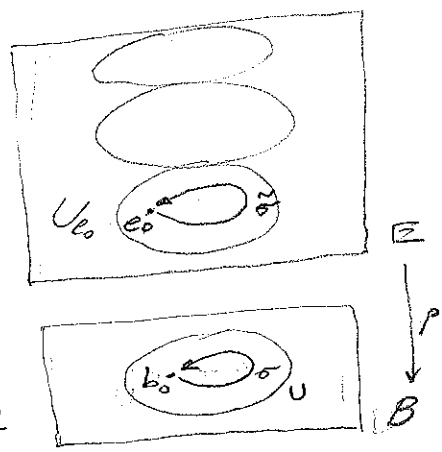
Déf : Un revêtement $p : E \longrightarrow B$ est <u>universel</u> si E est simplement connexe.

Rques : 1) C'est le cas ssi sa fibre est isomorphe à π_B.

2) Si $(E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ est universel, il est "universel parmi les revêtements pointés", par le Corollaire 3.

Exemple de revêtement universel : p. 65 et 66

Rque : Supposons que B possède un revêtement universel $E \xrightarrow[p]{} B$. Soient $b_0 \in B$ et U un voisinage de b_0 tel que $p^{-1}(U) \longrightarrow U$ est trivialisable. Alors tout lacet σ <u>dans U</u> basé en b_0 est l'image par p d'un lacet $\tilde{\sigma}$ dans un feuillet U_{e_0} de $p^{-1}(U)$. Comme E est simplement connexe, $\tilde{\sigma}$ est contractile dans E (mais peut-être pas dans U_{e_0}). Donc σ est contractile dans B (mais peut-être pas dans U). Il vient que B est semi-localement simplement connexe au sens de la



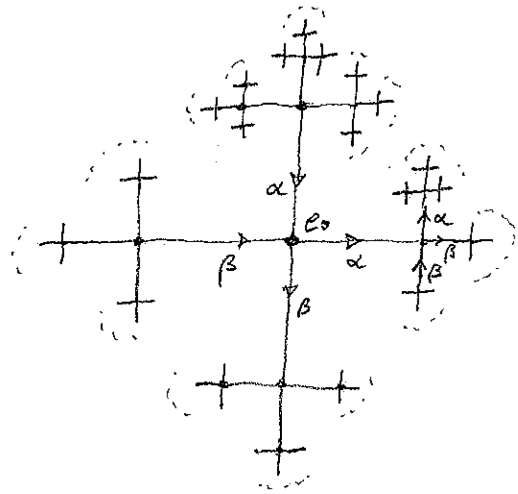
Déf : Un espace B est <u>semi-localement simplement connexe</u> si tout point b_0 possède un voisinage U tel que tout lacet dans U basé en b_0 est contractile dans B.

Non-exemple : Soit B la réunion dans $\mathbb{R}^2$ des cercles C_n, $n > 0$, de milieu $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. $\longrightarrow$ p. 67

Exemple : Le revêtement universel d'un bouquet de deux cercles :

B :

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ le sous-espace



obtenu en recollant des segments de longueur $1, \lambda, \lambda^2, \dots$ où $\lambda = 1/3$. On définit une application continue $p : E \longrightarrow B$ en envoyant tous les points de branchement sur b_0 et les segments étiquetés $\xrightarrow{\alpha}$ resp. $\xrightarrow{\beta}$ sur les lacets avec la même étiquette en respectant l'orientation indiquée.

Alors $p : E \longrightarrow B$ est un revêtement (!).

L'espace E est contractile donc simplement connexe.

Donc $p : E \to B$ est le revêtement universel. Sa fibre $X = p^{-1}(b_0)$ est donc isomorphe à $\pi_1(B, b_0) =: \pi_B$ par l'application

$$\pi_B \xrightarrow{\sim} p^{-1}(b_0), \quad \sigma \longmapsto e_0 . \sigma$$

(isomorphisme de π_B-ensembles).

La partie X est formée exactement des points de branchement. Pour tout $x \in X$, il existe un chemin γ_x unique à homotopie près, qui mène de e_0 à x. On a $e_0 \cdot p(\gamma_x) = x$. Pour γ_x, on peut choisir par exemple un chemin de longueur minimale.

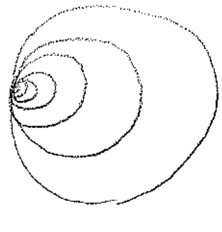
Ce chemin correspond à un unique <u>mot réduit</u> en $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}$, i.e. un mot qui ne comporte pas les sous-mots $\alpha\alpha^{-1}$, $\alpha^{-1}\alpha$, $\beta\beta^{-1}$, $\beta^{-1}\beta$. Tout élément $[\gamma]$ de $\pi_1(B, b_0)$ s'écrit donc comme un unique mot réduit en les générateurs α, β et leurs inverses ce qui signifie que le groupe non commutatif $\pi_1(B, b_0)$ est <u>librement engendré</u> par α et β. Pour chaque point x de la fibre $p^{-1}(b_0) = X$, il existe un unique automorphisme g de $p: E \longrightarrow B$ qui envoie e_0 sur x. Le groupe G des automorphismes de $p: E \longrightarrow B$ est isomorphe à π_B par l'isomorphisme

$$\varphi : \pi_B \longrightarrow G$$

défini par $\varphi(\sigma)(e_0) = e_0 \cdot \sigma$ pour tout $\sigma \in \pi_B$.

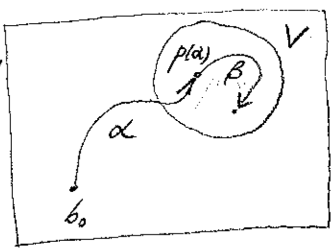
$\rightarrow$ p. 64

Alors le point $b_0 = (0,0)$ n'admet pas de voisinage U tel que tous les lacets dans U basés en b_0 soient contractiles dans B. Donc B n'admet pas de revêtement universel.

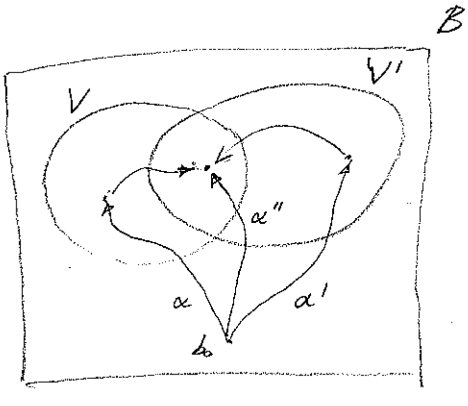


Thm 4 : Soit B un espace topologique connexe (et loc. connexe par arcs). Alors B admet un revêtement universel si et seulement si B est semi-localement simplement connexe.

Dém. : On a déjà vu que la condition était nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit E l'ensemble des classes d'homotopie $\langle\alpha\rangle$ (homotopie à extr. fixes) de chemins α de source b_0 dans B. Soit $p : E \to B$ l'application qui, à la classe $\langle\alpha\rangle$ d'un chemin, associe le but $\alpha(1)$ de α. Définissons une topologie sur E.



Pour $\langle\alpha\rangle \in E$ et V un voisinage ouvert de $\alpha(1)$, notons $\langle\alpha, V\rangle$ l'ensemble des classes d'homotopie $\langle\alpha\beta\rangle$, où β est la classe d'un chemin dans V de source $p(\alpha)$. Si l'on a $\langle\alpha''\rangle \in \langle\alpha,V\rangle \cap \langle\alpha',V'\rangle$, alors on a $\langle\alpha'',V\rangle = \langle\alpha,V\rangle$ et $\langle\alpha'',V\cap V'\rangle \subseteq \langle\alpha,V\rangle \cup \langle\alpha,V'\rangle$. Donc les $\langle\alpha,V\rangle$ forment la base d'une topologie sur E et on munit E de cette topologie.



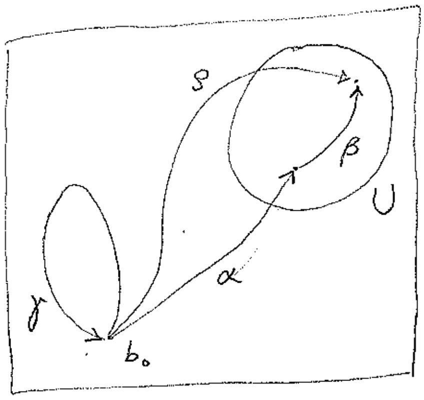
Alors l'application $p : E \to B$ est continue (clair) et elle est ouverte car $p(\langle\alpha,V\rangle)$ est la composante connexe par arcs de V contenant $p(\langle\alpha\rangle)$. Montrons que $p : E \to B$ est un revêtement. Soit $b \in B$ et soit U un voisinage ouvert et connexe par arcs de b

tel que tout lacet dans U basé en b est contractile dans B.

Je dis que $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ est un revêtement trivialisable.

En effet, soit $\langle\alpha\rangle \in p^{-1}(U)$. Alors on a une application bien définie

$$\varphi : \langle\alpha, U\rangle \times \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(U)$$
$$(\langle\alpha\beta\rangle, \langle\gamma\rangle) \longmapsto \langle\gamma\alpha\beta\rangle$$



Elle est surjective car si δ est un chemin de source b_0 et de but dans U, alors il existe un chemin β dans U de $\alpha(1)$ à $\delta(1)$ et on a

$$\delta \simeq (\delta(\alpha\beta)^{-1})\alpha\beta.$$

Elle est injective car si $\gamma\alpha\beta \simeq \gamma'\alpha\beta'$ alors $\beta \simeq \beta'$ dans B par l'hypothèse sur U et donc $\gamma \simeq \gamma'$. Clairement φ est continue et ouverte. Donc φ est un homéomorphisme.

Déterminons la fibre $p^{-1}(b_0)$ en tant que $\pi_1(B, b_0)$-ensemble.

Nous avons

$$p^{-1}(b_0) = \{\langle\alpha\rangle \in E \,/\, \alpha(1) = 1\} = \pi_1(B, b_0).$$

Soit $\langle\gamma\rangle \in p^{-1}(b_0)$. Soit α un lacet en b_0. Calculons $\langle\gamma\rangle.\alpha$. Pour $s \in I$, soit α_s le chemin $t \mapsto \alpha(st)$, $t \in I$. Alors le chemin

$$\tilde{\alpha} : I \longrightarrow E, \; s \longmapsto \langle\gamma\alpha_s\rangle$$

commence en $\langle\gamma\rangle$, est continu et relève α.

$\langle\gamma\rangle.\alpha = \tilde{\alpha}(1) = \langle\gamma\alpha\rangle$. Cela montre que $p^{-1}(b_0)$ est

isomorphe à $\pi_1(B,b_0)$ en tant que $\pi_1(B,b_0)$-ensemble.
Donc $p: E \to B$ est universel. ✓

Déf.: Une <u>variété topologique</u> de dimension $n \in \mathbb{N}$ est un espace topologique où tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.

Cor. 5 : Toute variété top. connexe admet un revêtement universel (qui est encore une variété topologique).

Exemples : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $S^n \to \mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$, sont des revêtements universels de variétés topologiques.

Cor. 6 : Soit B un espace connexe, loc. connexe par arcs et qui admet un revêtement universel. Soient $b_0 \in B$ et $\pi_B = \pi_1(B, b_0)$.

a) Pour tout sous-groupe H de π_B, il existe un revêtement pointé $(E,e_0) \xrightarrow[p]{} (B,b_0)$, unique à isomorphisme pointé unique près, tel que $p_*(\pi_1(E,e_0)) = H$.

b) Pour tout G-ensemble X, il existe un revêtement $p: E \to X$, unique à isomorphisme près, de fibre $p^{-1}(b_0)$ isomorphe à X. L'espace E est connexe ssi X est transitif.

Dém.: a) On applique b) à $X = H \backslash \pi_B$ pour obtenir $p: E \to B$ connexe de fibre X et de point de base $e_0 = eH$. Pour un autre revêtement $E' \to B$ de fibre X, il existe un isomorphisme $E \xrightarrow[f]{} E'$ unique tel que $f(e_0') = e_0$ car E' est connexe.