1.8 Espaces de lacets et groupes d'homotopie supérieurs

Préliminaires sur la topologie compacte-ouverte

But : Pour un espace pointé (X, x_0), on aimerait munir l'ensemble $\Omega(X, x_0)$ des lacets de X basés en x_0 d'une "bonne" topologie.

Déf : Soient X un espace topologique et Y un espace localement compact (i.e. tel que tout voisinage de tout point de Y contient un voisinage compact et que Y est séparé). Pour $K \subset Y$ compact et $U \subset X$ ouvert, posons

$$[K, U] = \{ f : Y \to X \mid f \text{ est continue et } f(K) \subseteq U \}.$$

La topologie compacte-ouverte sur l'ensemble X^Y des applications continues de Y dans X a pour base l'ensemble des intersections finies de parties $[K, U]$, où $K \subset Y$ est compact et $U \subset X$ ouvert.
On note X^Y ou $Map(Y, X)$ cet espace.

Exercice : Si Y est compact et X est métrique de métrique d, alors la topologie compacte ouverte est celle de la convergence uniforme, c'est-à-dire qu'elle est donnée par la métrique d_* t.q.

$$d_*(f, g) = \sup_{y \in Y} d(f(y), g(y)).$$

Lemme 1 : Soient X et Z des espaces top. et Y localement compact.

a) L'application d'évaluation $Map(Y, X) \times Y \xrightarrow{ev} X$, $(f, y) \longmapsto f(y)$ est continue.

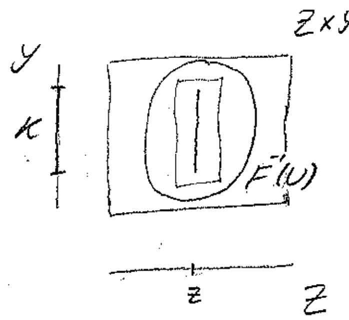
b) L'application canonique

$$Top(Z \times Y, X) \longrightarrow Top(Z, Map(Y, X))$$
$$F \longmapsto (z \longmapsto F(z, ?)) = \hat{F}$$

est bien définie et bijective. Ici $Top(\,,\,)$ désigne l'ens. des appl. continues

Dém. : a) Soient (f,y) un point de $Map(Y,X)\times Y$ et U un voisinage ouvert de $\text{év}(f,y)=f(y)$. Comme f est continue et Y localement compact, il existe un voisinage compact K de y t.q. $f(K)\subset U$. Alors $[K,U]\times K$ est un voisinage de (f,y) dans $Map(Y,X)\times Y$ dont l'image par év est contenue dans U. Donc év est continue en (f,y).

b) Supposons que $F: Z\times Y\to X$ est continue. Montrons que $\hat{F}: Z\to Map(Y,X)$ l'est encore. Il suffit de montrer que $\hat{F}^{-1}([K,U])$ est ouvert si $K\subset Y$ est compact et $U\subset X$ ouvert. Soit $z\in\hat{F}^{-1}([K,U])$. Alors $F(z,K)\subseteq U$. Donc $F^{-1}(U)$ est un ouvert contenant le compact $\{z\}\times K$. Nous avons donc



$$\{z\}\times K \subset \bigcup_{i\in I}(V_i\times W_i)\subset F^{-1}(U)$$

pour une famille finie $(V_i\times W_i)_{i\in I}$ de produits d'ouverts de Z par des ouverts de Y. Pour $V=\bigcup_{i\in I}V_i$ et $W=\bigcap W_i$ nous avons encore

$$\{z\}\times K\subset V\times W\subset F^{-1}(U).$$

Alors $F(V,K)\subseteq F(V,W)\subseteq U$ et V est un voisinage de z dans $\hat{F}^{-1}([K,U])$.

Réciproquement, supposons que $\hat{F}$ est continue. L'application F est la composition $Z\times Y\xrightarrow{\hat{F}\times Id} Map(Y,X)\times Y\xrightarrow{\text{év}} X$

Donc elle est continue par a). ✓

Prop. 2 : Soient X un espace top. et Y, Z des espaces localement compacts. Alors l'application canonique

$$Map(Z\times Y,X)\xrightarrow{\simeq} Map(Z,Map(Y,X)),\quad f\longmapsto\hat{f}$$

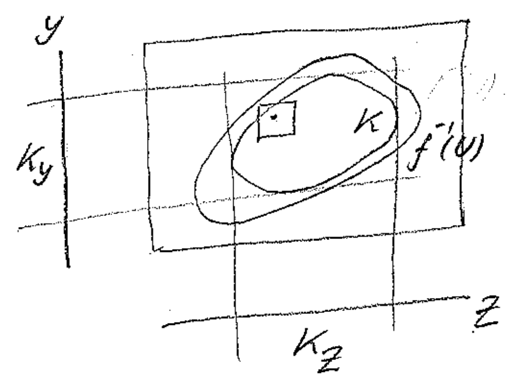
est un homéomorphisme.

Déf : Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de parties de X. $\mathcal{V}$ est une <u>sous-base</u> de X si les intersections finies d'éléments de $\mathcal{V}$ forment une base de X.

Exemple : Les parties $[K,U]$, $K \subset Y$ compact, $U \subset X$ ouvert, forment une sous-base de la topologie de $\mathrm{Map}(Y,X)$.

Dém. de la prop. 2 : 1ère étape : Les $[B \times A, U]$, $B \subset Z$ compact, $A \subset Y$ compact, $U \subset X$ ouvert, forment une sous-base de la topologie de $\mathrm{Map}(Z \times Y, X)$.

En effet, soient $U \subset X$ un ouvert, $K \subset Z \times Y$ un compact et $f \in [K,U]$.



Soient K_Z et K_Y les projetés de K sur Z resp. Y. Alors $K_Z \times K_Y$ est compact. Donc pour tout point $k \in K$, il existe des voisinages compacts $B_k \subset K_Z$ et $A_k \subset K_Y$ tels que
$$k \in B_k \times A_k \subset f^{-1}(U) \cap (K_Z \times K_Y).$$
Comme K est compact, il existe une partie finie $L \subset K$ telle que les $B_k \times A_k$, $k \in L$, recouvrent K. Alors l'intersection
$$\bigcap_{k \in L} [B_k \times A_k, U]$$
est un voisinage de f dans $[K,U]$.

2e étape : l'affirmation.
Par la bijection $\mathrm{Map}(Z \times Y, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}(Z, \mathrm{Map}(Y,X))$, les parties $[B \times A, U]$ correspondent aux parties $[B, [A,U]]$. Ces dernières forment une sous-base de la topologie de $\mathrm{Map}(Z, \mathrm{Map}(Y,X))$ grâce au lemme suivant. ✓

Lemme 3 : Soient X un espace top., $\mathcal{V}$ une sous-base de X et Y un espace localement compact. Alors les parties $[K, V]$ où $K \subset Y$ est compact et $V \in \mathcal{V}$, forment une sous-base de la topologie de $\mathrm{Map}(Y, X)$.

Dém. : Soient $K \subset Y$ un compact, $U \subset X$ un ouvert et $f \in [K, U]$. Ecrivons U comme réunion de parties U_λ, $\lambda \in \Lambda$, qui sont chacune l'intersection d'une famille finie $V_{\lambda,j}$, $j \in J_\lambda$, d'éléments de $\mathcal{V}$. On a $f(K) \subset U$ et donc $K \subset f^{-1}(U)$. Le compact K est donc recouvert par les $f^{-1}(U_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Il est donc encore recouvert par les $f^{-1}(U_\lambda)$ où λ appartient à une partie finie $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Comme K est compact, il est normal (deux fermés disjoints peuvent être séparés par des ouverts disjoint). Donc il existe des compacts[1] $K_\lambda \subset f^{-1}(U_\lambda) \cap K$, $\lambda \in \Lambda_0$, qui recouvrent K. Alors f se trouve dans

$$[K_\lambda, U_\lambda] = [K_\lambda, \bigcap_{j \in J_\lambda} V_{\lambda,j}] = \bigcap_{j \in J_\lambda} [K_\lambda, V_{\lambda,j}]$$

pour tout $\lambda \in \Lambda_0$ et donc dans

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} \bigcap_{j \in J_\lambda} [K_\lambda, V_{\lambda,j}] = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} [K_\lambda, U_\lambda] \subseteq [K, U].$$

Cela montre bien que les $[K, V]$ forment une sous-base de $\mathrm{Map}(Y, X)$. ✓

---

[1] On choisit K_λ tel que $K \setminus \left(\bigcup_{\substack{\lambda' \neq \lambda \\ \lambda' \in \Lambda_0}} f^{-1}(U_{\lambda'})\right) \subseteq K_\lambda \subseteq f^{-1}(U_\lambda)$ donc $K \setminus K_\lambda$ sépare le fermé $K \setminus f^{-1}(U_\lambda)$ du fermé $K \setminus \left(\bigcup_{\substack{\lambda' \neq \lambda \\ \lambda' \in \Lambda_0}} f^{-1}(U_{\lambda'})\right)$.

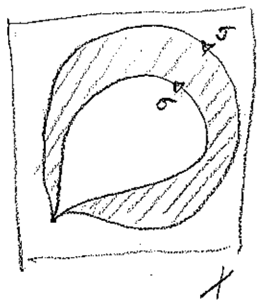
Déf : Soit (X, x_0) un espace top. pointé. L'espace des lacets $\Omega(X,x_0)$ est le sous-espace de X^I formé des lacets de X basés en x_0.

Rque : On a donc

$$\Omega(X,x_0) = \{\sigma : I \to X \mid \sigma(0) = \sigma(1) = x_0\} \subseteq Map(I,X)$$

Les évaluations $\sigma \mapsto \sigma(0)$ et $\sigma \mapsto \sigma(1)$ sont continues. Donc si $\{x_0\}$ est fermé dans X (p.ex. si X est séparé), alors $\Omega(X,x_0)$ est un sous-espace fermé.

Lemme 2 : Deux lacets σ, τ basés en x_0 se trouvent dans la même composante connexe par arcs de $\Omega(X,x_0)$ ssi ils sont homotopes (à extrémités fixes).



Dém. : Par la bijection

$$Top(I\times I, X) \simeq Top(I, Map(I,X))$$
$$F \longleftrightarrow (s \mapsto F(s,?))$$

les homotopies $F : \sigma \simeq \tau$ rel ∂I correspondent exactement aux chemins de σ vers τ. ✓

Cor. 4 : Les composantes connexes par arcs de $\Omega(X,x_0)$ sont en bijection avec les éléments du groupe fondamental $\pi_1(X,x_0)$.

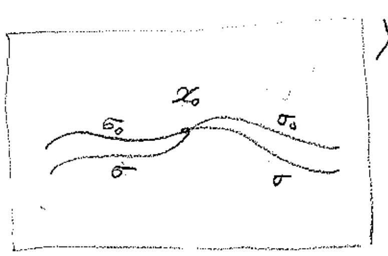
Lemme 5 : Notons $Map(I,X)_{x_0}$ resp. ${}_{x_0}Map(I,X)$ le sous-espace des chemins de but resp. de source x_0. Alors la composition des chemins

$$Map(I,X)_{x_0} \times {}_{x_0}Map(I,X) \longrightarrow Map(I,X)$$

est continue. En particulier, la composition

$$\Omega(X,x_0) \times \Omega(X,x_0) \longrightarrow \Omega(X,x_0)$$

est continue.



Dém. : Soient

$K \subset I$ un compact et $U \subset X$ un ouvert.

Soit
$$\alpha : [0,1] \xrightarrow{\sim} [0, 1/2],\ t \longmapsto 1/2 t,$$
$$\beta : [0,1] \xrightarrow{\sim} [1/2, 1],\ t \longmapsto 1/2 + 1/2 t.$$

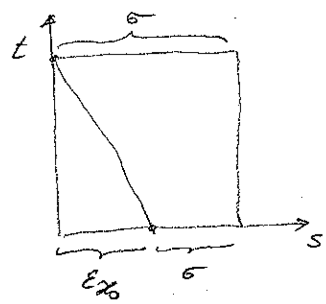
On a
$$\sigma\tau \in [K, U] \iff (\sigma\tau)(t)(K) \subseteq U$$
$$\iff \sigma(\alpha^{-1}(K \cap [0, 1/2])) \subseteq U \text{ et}$$
$$\tau(\beta^{-1}(K \cap [1/2, 1])) \subseteq U$$

ce qui montre que l'image réciproque de $[K, U]$ dans $\mathrm{Map}(I, X)_{x_0} \times_{x_0} \mathrm{Map}(I, X)$ est le produit $[L_1, U] \times [L_2, U]$ pour les deux parties compactes $L_1 = \alpha^{-1}(K \cap [0, 1/2])$ et $L_2 = \beta^{-1}(K \cap [1/2, 1])$. ✓

Lemme 6 : La multiplication à gauche resp. à droite par ε_{x_0} dans $\Omega(X, x_0)$ est homotope à l'identité.

Dém. : Nous avons l'homotopie $H_\sigma : \varepsilon_{x_0} * \sigma \simeq \sigma$ rel ∂I

donnée par
$$H_\sigma(s,t) = \begin{cases} x_0 & s \leq 1/2 - 1/2 t \\ \sigma\left(\dfrac{s - 1/2 + 1/2 t}{1/2 + 1/2 t}\right) & s \geq 1/2 - 1/2 t \end{cases}$$



Elle est continue en tant qu'application
$$I \times \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$$
$$(t, \sigma) \longmapsto H_\sigma(?, t)$$

Elle fournit donc une homotopie entre la multiplication à gauche $\varepsilon_{x_0} *$? et l'identité. De même pour la mult. à droite. ✓

Rque : Notons que nous avons $\varepsilon_{x_0} \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{x_0}$ dans $\Omega(X, x_0)$.

Thm 7 : Le groupe $\pi_1(\Omega(X,x_0), \varepsilon_{x_0})$ est commutatif.

Dém. : Notons $G = \pi_1(\Omega(X,x_0), \varepsilon_{x_0})$. La composition des lacets

$$\Omega(X,x_0) \times \Omega(X,x_0) \longrightarrow \Omega(X,x_0)$$

envoie $(\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0})$ sur ε_{x_0} et fournit donc un homomorphisme de groupes de

$$\pi_1(\Omega(X,x_0) \times \Omega(X,x_0)) = \pi_1(\Omega(X,x_0)) \times \pi_1(\Omega(X,x_0))$$

dans $\pi_1(\Omega(X,x_0))$. Notons

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

cet homomorphisme. Par le lemme 5, l'unité $e = \varepsilon_{x_0}$ est aussi une unité à droite et à gauche pour $*$. Il en résulte que pour $g,h \in G$, nous avons

$$g*h = (g e) * (e \cdot h) = (g*e)\cdot(e*h) = gh$$
$$g*h = (eg) * (h\cdot e) = (e*h)\cdot(g*e) = hg .$$

Donc les deux lois $\cdot$ et $*$ coïncident et sont commutatives. ✓

Rque : Par le même argument, on montre que $\pi_1(\Gamma, e)$ est commutatif pour tout groupe topologique Γ. Notons que $\Omega(X,x_0)$ n'est pas un groupe topologique (car non associatif).

Déf : Les groupes d'homotopie supérieurs de (X,x_0) sont définis par récurrence : $\pi_n(X,x_0) := \pi_{n-1}(\Omega(X,x_0), \varepsilon_{x_0})$, $n \geq 2$.

Rque : On a donc $\pi_n(X,x_0) = \pi_1(\Omega^{n-1}(X,x_0), \varepsilon)$, $n \geq 2$, et même $\pi_n(X,x_0) = \pi_0^c(\Omega^n(X,x_0), \varepsilon)$, où π_0^c désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs.