Thm 7 : Le groupe $\pi_1(\Omega(X,x_0), \varepsilon_{x_0})$ est commutatif.

Dém. : Notons $G = \pi_1(\Omega(X,x_0), \varepsilon_{x_0})$. La composition des lacets

$$\Omega(X,x_0) \times \Omega(X,x_0) \longrightarrow \Omega(X,x_0)$$

envoie $(\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0})$ sur ε_{x_0} et fournit donc un homomorphisme de groupes de

$$\pi_1(\Omega(X,x_0) \times \Omega(X,x_0)) = \pi_1(\Omega(X,x_0)) \times \pi_1(\Omega(X,x_0))$$

dans $\pi_1(\Omega(X,x_0))$. Notons

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

cet homomorphisme. Par le lemme 5, l'unité $e = \varepsilon_{x_0}$ est aussi une unité à droite et à gauche pour $*$. Il en résulte que pour $g, h \in G$, nous avons

$$g * h = (g e) * (e \cdot h) \underset{*\text{hom.}}{=} (g * e) \cdot (e * h) = gh$$
$$g * h = (e g) * (h \cdot e) \underset{*\text{hom.}}{=} (e * h) \cdot (g * e) = hg .$$

Donc les deux lois $\cdot$ et $*$ coïncident et sont commutatives. ✓

Rque : Par le même argument, on montre que $\pi_1(\Gamma, e)$ est commutatif pour tout groupe topologique Γ. Notons que $\Omega(X,x_0)$ n'est pas un groupe topologique (car non associatif).

Déf : Les groupes d'homotopie supérieurs de (X,x_0) sont définis par récurrence :
$$\pi_n(X,x_0) := \pi_{n-1}(\Omega(X,x_0), \varepsilon_{x_0}) \quad , \quad n \geq 2.$$

Rque : On a donc $\pi_n(X,x_0) = \pi_1(\Omega^{n-1}(X,x_0), \varepsilon) \, , \quad n \geq 2,$

et même $\pi_n(X,x_0) = \pi_0^a(\Omega^n(X,x_0), \varepsilon)$, où π_0^a désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs.

Cor. 8 : Les groupes $\pi_n(X,x_0)$, $n\geq 2$, sont commutatifs.

Rque : Soient des espaces topologiques X, Y munis de sous-espaces $X_0 \subseteq X$ et $Y \subseteq Y_0$. On pose

$$Top((Y,Y_0),(X,X_0)) := \{f : Y \to X \mid f(Y_0) \subseteq X_0\}$$

$$(X,X_0)\times(Y,Y_0) := (X\times Y,\ X_0\times Y \cup X\times Y_0)$$

et, pour Y localement compact et $Y_0 \subseteq Y$ fermé :

$$Map((Y,Y_0),(X,X_0)) := \{f : Y\to X \mid f(Y_0)\subseteq X_0\} \underset{ss\text{-}esp.}{\subseteq} Map(Y,X).$$

Alors, pour (Y,Y_0) et (Z,Z_0) loc. compacts, on a

$$Top((Z,Z_0)\times(Y,Y_0),(X,X_0)) \simeq Top((Z,Z_0), Map((Y,Y_0),(X,X_0))).$$

et

$$Map((Z,Z_0)\times(Y,Y_0),(X,X_0)) \simeq Map((Z,Z_0), Map((Y,Y_0),(X,X_0)))$$

Nous avons

$$\Omega(X,x_0) = Map((I,\partial I),(X,x_0))$$

$$\Omega^2(X,x_0) = Map((I,\partial I), Map((I,\partial I),(X,x_0)))$$

$$= Map((I,\partial I)\times(I,\partial I),(X,x_0))$$

$$\vdots$$

$$\Omega^n(X,x_0) = Map((I,\partial I)\times(I,\partial I)\times\ldots\times(I,\partial I),(X,x_0))$$

$$= Map((I^n,\partial I^n),(X,x_0)).$$

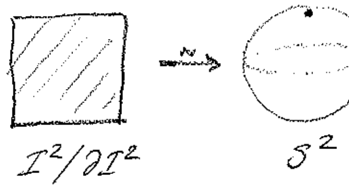
$$\pi_n(X,x_0) = \pi_0^a(Map((I^n,\partial I^n),(X,x_0)))$$

$$= \{\text{classes d'homotopie d'appl. cont. } (I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)\}$$

Les appl. continues $(I^n,\partial I^n)\xrightarrow{f}(X,x_0)$ sont celles t.q. $f(\partial I^n)=\{x_0\}$.
Donc elles correspondent bij. aux appl. cont. $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n)\to(X,x_0)$.

Or nous avons un homéomorphisme

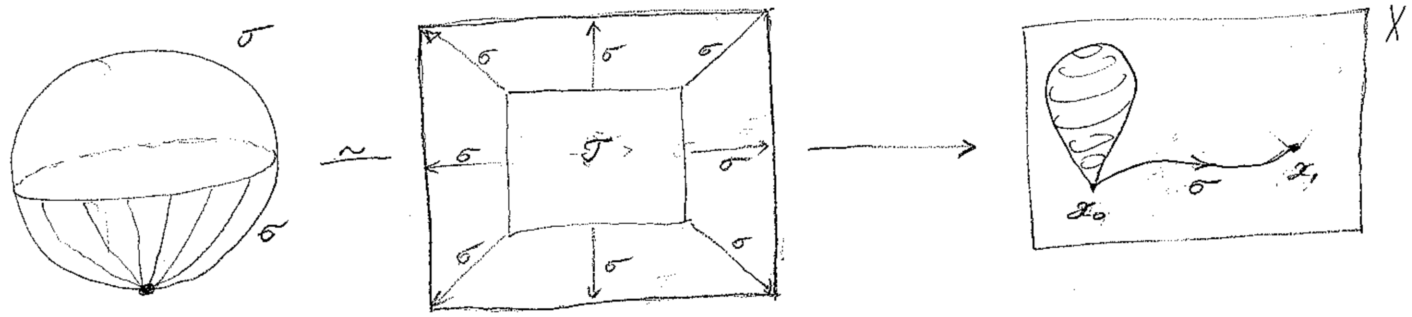
$$(I^n/\partial I^n,\ \partial I^n/\partial I^n) \xrightarrow{\simeq} (S^n, s_0)$$



Donc les éléments de $\pi_n(X, x_0)$ sont aussi les composantes connexes par arcs de

$$\mathrm{Map}((S^n, s_0), (X, x_0));$$

c'est-à-dire les classes d'homotopie d'appl. cont. $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$.



Déf. : Soit $\tau : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ et soit $\sigma : I \longrightarrow X$ un chemin de x_0 à x_1. On définit l'application $\tilde{\sigma}_* \tau : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_1)$ par

$$\tilde{\sigma}_* \tau(t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} \tau(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)), & \psi(t_1, \dots, t_n) \in [0,1] \\ \sigma(\psi(t_1, \dots, t_n)), & \psi(t_1, \dots, t_n) \geq 1 \end{cases}$$

où $\psi(t_1, \dots, t_n) = 4 \cdot \max(|t_i - 1/2|) - 1$, $\varphi(t) = 2(t - 1/2) + 1/2$.

Lemme 9 : a) La classe d'homotopie de $\tilde{\sigma}_* \tau$ ne dépend que de celles de σ et de τ. On note
(admis)

$$\sigma_* : \pi_n(X, x_1) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

l'application induite. C'est un homomorphisme de groupes.

b) On a $(\varepsilon_{x_0})_* = Id$ et $(\sigma_1 \sigma_2)_* = \sigma_{1*} \sigma_{2*}$.

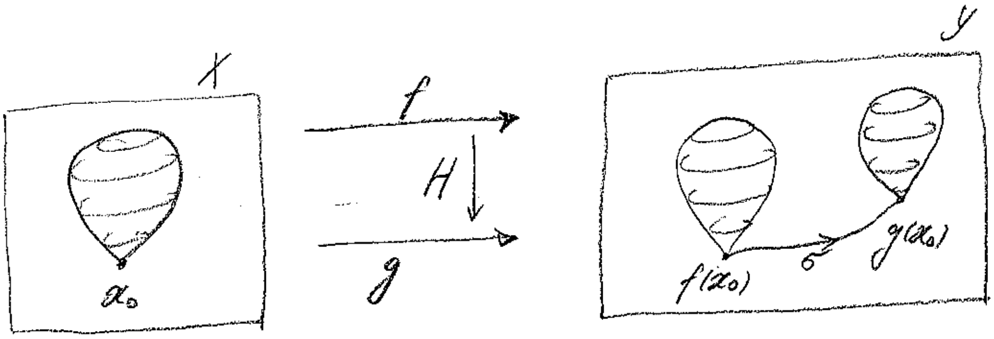
En particulier, σ_* est un isomorphisme.

Déf : Soit $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ un morphisme d'espaces pointés.
Pour $\sigma : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$, on pose $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$.
On définit $\Omega^n(f) : \Omega^n(X, x_0) \longrightarrow \Omega^n(Y, y_0)$ par $\sigma \longmapsto f_*(\sigma)$.

Lemme 10 : a) La classe d'homotopie de $f_*(\sigma)$ ne dépend que
(admis)
de celle de σ. L'application induite $f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$
ne dépend que de la classe d'homotopie de $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.
On a $Id_* = Id$ et $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

b) Si f et g sont deux applications continues et
$H : f \simeq g$ est une homotopie, on a le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} & \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\sigma_*"] \\ \pi_n(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, "g_*"'] & \pi_n(Y, g(x_0)) \end{tikzcd} \quad , \ \sigma(t) = H(x_0, t),\ t \in I.$$



Cor. 11 : Si on a une équivalence d'homotopie $f : X \longrightarrow Y$,
alors $f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme.
En particulier, si X est contractile, tous les groupes
$\pi_n(X, x_0)$ sont triviaux, $n \geq 1$.

Thm 12 : Si $p : (E,e_0) \longrightarrow (B,b_0)$ est un revêtement pointé, alors $p_* : \pi_n(E,e_0) \longrightarrow \pi_n(B,b_0)$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 2$.

Dém. : On considère $\pi_n(B,b_0)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues $(S^n,s_0) \longrightarrow (B,b_0)$. Comme S^n est simplement connexe pour $n \geq 2$ (Cor. 1.3.10, p. 41), toute appl. continue $(S^n,s_0) \longrightarrow (B,b_0)$ se relève le long de p (Cor. 1.5.2 p. 63). D'où la surjectivité. L'injectivité résulte du relèvement des homotopies (Thm 1.4.3., p. 46). ✓

$$\begin{tikzcd} & (E,e_0) \arrow[d, "p"] \\ (S^n,s_0) \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & (B,b_0) \end{tikzcd}$$

Cor. 13 : On a $\pi_n(S^m) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbb{R}P^m)$ pour tout $n \geq 2$ et tous m.

Cor. 14 : On a $\pi_n(S^1) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Dém. : On a le revêtement universel $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ et $\mathbb{R}$ est contractile. Donc $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$ par le Cor. 10 et $\pi_n(S^1) = 0$ par le Thm 12 pour $n \geq 2$. ✓

Rques : 1) Nous allons montrer plus tard que

a) $\pi_n(S^m) = 0$ pour $n < m$ et

b) $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

En particulier, on a $\pi_n(S^n) \neq 0$, ce qui permet de démontrer le thm du point fixe de Brouwer pour la boule D^n.

2) On sait que $\pi_n(S^m)$ est fini pour $n > m$ (Serre, 1953) mais on ignore sa structure en général !

2. Homologie

But : Construire, pour un espace topologique X, une suite de groupes abéliens $H_n(X)$, $n \geq 0$, qui "ressemblent" à $\pi_n(X, x_0)$ mais qui soient "faciles à calculer".

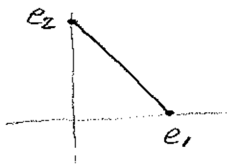
2.1 Homologie simpliciale

Déf. : Pour $n \geq 0$, le n-simplexe standard est l'espace

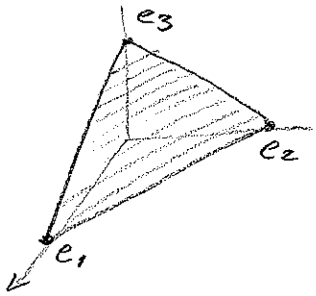
$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t_i \text{ pour tous } i \text{ et } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Exemples : $\Delta^0 = \{1\} \subset \mathbb{R}$

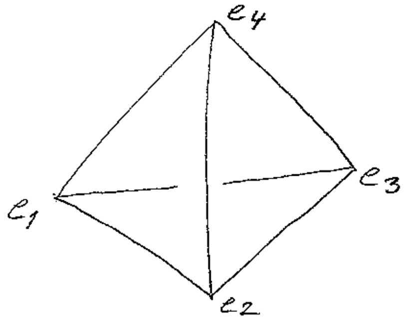
Δ^1 :



Δ^2 :



Δ^3 :



: tétraèdre solide dans $\mathbb{R}^4$.

Déf : Pour $n \geq 0$ et $0 \leq i \leq n$, la i-ième face de Δ^n est

$$\partial_i \Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \mid t_i = 0\}.$$

On l'identifie avec Δ^{n-1} via l'homéomorphisme

$$s_i : \Delta^{n-1} \xrightarrow{\sim} \partial_i \Delta^n, \quad (t_0, \dots, t_n) \longmapsto (t_0, \dots, \underset{\uparrow\ i\text{-ième position}}{0}, \dots, t_n).$$

Le bord de Δ^n est la réunion $\partial \Delta^n$ des faces $\partial_i \Delta_n$, $0 \leq i \leq n$.

Le simplexe ouvert $\mathring{\Delta}^n$ est $\Delta^n \setminus \partial \Delta^n$.

Rque : On a $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ pour $i \leq j$ car $s_i s_j(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, \overset{i}{0}, \dots, \overset{j+1}{0}, \dots, t_n)$

Déf: Soit X un espace topologique. Une *structure de Δ-complexe sur X* est la donnée d'une famille d'applications $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \longrightarrow X$, $\alpha \in \Lambda$, telle que

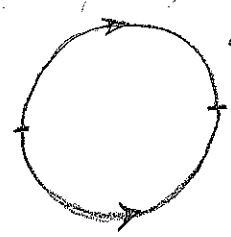
1) la restriction de σ_α au simplexe ouvert $\mathring{\Delta}^{n_\alpha}$ est injective pour tout $\alpha \in \Lambda$ et X est la réunion disjointe des images $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^{n_\alpha})$;

2) pour chaque $\alpha \in \Lambda$ et chaque face $\partial_i \Delta^{n_\alpha}$, la restriction de σ_α à $\partial_i \Delta^{n_\alpha}$ est égale à $\sigma_\beta : \Delta^{n_\beta} \longrightarrow X$ pour un unique $\beta \in \Lambda$ (on a donc $n_\beta = n_\alpha - 1$) et $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ s_i$).

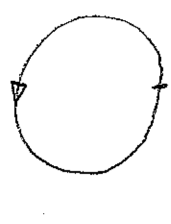
3) une partie U de X est ouverte ssi $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ est ouvert dans Δ^{n_α} pour tout $\alpha \in \Lambda$.

On appelle *n-simplexes du Δ-complexe* les applications $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \longrightarrow X$ tels que $n_\alpha = n$.

Exemples: 1) Le cercle S^1 a une structure de Δ-complexe avec deux 0-simplexes (d'images $\{-1\}$ et $\{1\}$) et deux 1-simplexes (d'images les arcs supérieur et inférieur). Il a une autre structure de Δ-complexe avec un 0-simplexe (d'image $\{1\}$) et un 1-simplexe $\Delta^1 \longrightarrow S^1$, $(t_0, t_1) \longmapsto e^{2\pi i t_1}$.



S^1



S^1