Déf : Soit X un espace topologique. Une <u>structure de Δ-complexe sur</u> X est la donnée d'une famille d'applications $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \longrightarrow X$, $\alpha \in \Lambda$, telle que

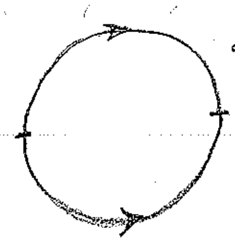
1) la restriction de σ_α au simplexe ouvert $\mathring{\Delta}^{n_\alpha}$ est injective pour tout $\alpha \in \Lambda$. et X est la réunion disjointe des images $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^{n_\alpha})$;

2) pour chaque $\alpha \in \Lambda$ et chaque face $\partial_i \Delta^{n_\alpha}$, la restriction de σ_α à $\partial_i \Delta^{n_\alpha}$ est égale à $\sigma_\beta : \Delta^{n_\beta} \longrightarrow X$ pour un unique $\beta \in \Lambda$ (on a donc $n_\beta = n_\alpha - 1$) et $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ s_i$).

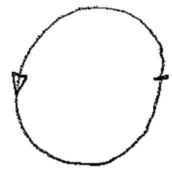
3) une partie U de X est ouverte ssi $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ est ouvert dans Δ^{n_α} pour tout $\alpha \in \Lambda$.

On appelle <u>n-simplexes du Δ-complexe</u> les applications $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \longrightarrow X$ tels que $n_\alpha = n$.

Exemples : 1) Le cercle S^1 a une structure de Δ-complexe avec deux 0-simplexes (d'images $\{-1\}$ et $\{1\}$) et deux 1-simplexes (d'images les arcs supérieur et inférieur). Il a une autre structure de Δ-complexe avec un 0-simplexe (d'image $\{1\}$) et un 1-simplexe $\Delta^1 \longrightarrow S^1$, $(t_0, t_1) \longmapsto e^{2\pi i t_1}$.

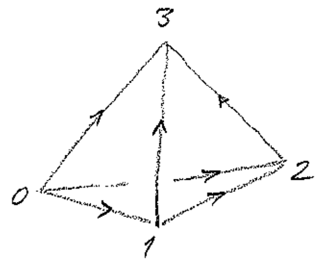


S^1

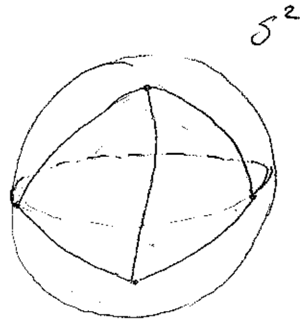


S^1

2) Le bord $\partial\Delta^3$ est la surface d'un tétraèdre.

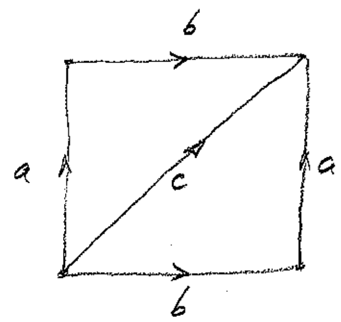


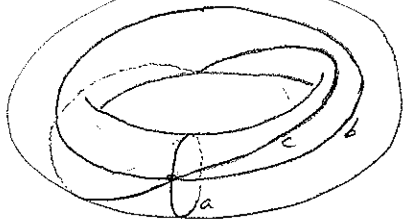
Il a une structure naturelle de Δ-complexe avec 4 2-simplexes (faces du tétraèdre) 6 1-simplexes et 4 0-simplexes.



$\partial\Delta^3$ est homéomorphe à S^2 et tout choix d'un homéomorphisme définit une structure de Δ-complexe sur S^2.

3) Le tore (obtenu en identifiant les côtés opposés d'un carré) à une structure de Δ-complexe avec deux 2-simplexes, trois 1-simplexes et un 0-simplexe





Déf. : Soit X un espace top. muni d'une structure de Δ-complexe $(\sigma_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.
Le <u>groupe des n-chaînes</u> $\Delta_n(X)$ est le groupe abélien libre de base les simplexes σ_α t.q. $n_\alpha = n$, i.e.

$$\Delta_n(X) = \bigoplus_{n_\alpha = n} \mathbb{Z}\cdot\sigma_\alpha \quad , \quad n \geq 0.$$

Ses éléments sont les <u>n-chaînes</u> de X. L'<u>application bord</u> est l'unique homom. $\partial_n : \Delta_n(X) \longrightarrow \Delta_{n-1}(X)$ tel que

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma_\alpha|_{\partial_i\Delta^n} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma_\alpha s_i$$

Rque : Notons que $\sigma_\alpha|_{\partial_i\Delta^n} = \sigma_\beta$ pour un unique $(n-1)$-simplexe β.

On obtient une suite d'homomorphismes de groupes abéliens

$$\cdots \longrightarrow \Delta_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X).$$

Lemme 1 : La composition

$$\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_0(X)$$

s'annule pour tout $n \geq 2$.

Dém. : On a

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}(\partial_n \sigma_\alpha) &= \partial_{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma_\alpha d_i\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \sigma_\alpha d_i d_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i \leq j}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{\sigma_\alpha d_i d_j}_{= \sigma_\alpha d_{j+1} d_i} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i>j}^{n} (-1)^{i+j} \sigma_\alpha d_i d_j \\
&= 0. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Déf. : Une suite d'homomorphismes de groupes abéliens

$$C_\cdot : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

t.q. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ pour tout $n \geq 1$ s'appelle un complexe ou complexe de chaînes. (notons que $\partial_n \partial_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$)

L'homologie en degré n de C est

$$H_n(C) = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

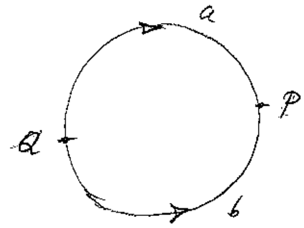
Les éléments de $\operatorname{Ker} \partial_n$ sont les n-cycles et ceux de $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$ les n-bords. Les éléments de $H_n(C)$ sont les classes d'homologie de degré n. Deux cycles sont homologues s'ils définissent la même classe d'homologie (ssi leur différence est un bord).

Notation : On note $C^\Delta(X)$ le complexe

$$\cdots \longrightarrow \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

associé à X et $H_n^\Delta(X)$ ses groupes d'homologie. On les appelle les groupes d'homologie simpliciales du Δ-complexe X.

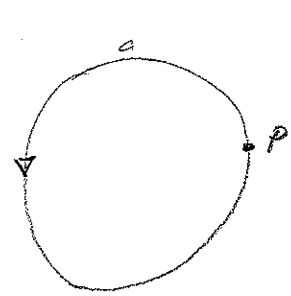
Exemples : 1) $X_1 = S^1$ avec la structure à deux 1-simplexes. Alors $C^\Delta(X_1)$ est



$$0 \longrightarrow \underset{\text{degré } 1}{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}]{} \underset{\text{degré } 0}{\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}q} \longrightarrow 0$$

et $H_n^\Delta(X_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2) $X_2 = S^1$ avec la structure à un 1-simplexe :

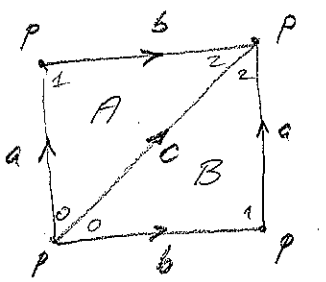


Alors $C^\Delta(X_2)$ est

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}a \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

et on trouve à nouveau $H_n^\Delta(X_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3) Soit X le tore avec la structure de Δ-complexe :



$$C^\Delta(X) : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}A \oplus \mathbb{Z}B \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}]{} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}]{} \mathbb{Z}p \longrightarrow 0$$

$$H_n^\Delta(X) : \quad \underset{\text{deg. } 2}{\mathbb{Z}} \qquad \underset{\text{deg. } 1}{\mathbb{Z}\bar{a} \oplus \mathbb{Z}\bar{b}} \qquad \underset{\text{deg. } 0}{\mathbb{Z}}$$

4) Considérons $X = \Delta^n$ avec sa structure canonique de Δ-complexe. On a donc un p-simplexe $\sigma_I : \Delta^p \longrightarrow \Delta^n$ pour chaque partie à $p+1$ éléments $I = \{i_0 < \dots < i_p\}$ de $\{0, \dots, n\}$, à savoir

$$\sigma : \Delta^p \longrightarrow \Delta^n, \ (t_0, \dots, t_p) \longmapsto \sum_{j=0}^{p} t_j e_{i_j}$$

où $e_0, \dots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors

$$C^\Delta(X) : \quad \mathbb{Z} \cdot \sigma_{\{0,\dots,n\}} \longrightarrow \bigoplus_{|I|=n} \mathbb{Z}\sigma_I \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}\sigma_{\{i\}} \longrightarrow 0$$

Exercice : a) Montrer que $H_p^\Delta(X) = \begin{cases} 0 & p>0 \\ \mathbb{Z} & p=0 \end{cases}$

b) Déduire que l'homologie simpliciale de $S^n \simeq \partial\Delta^{n+1}$ est

$$H_p^\Delta(S^n) = \begin{cases} 0 & p \neq 0, n \\ \mathbb{Z} & p = 0 \text{ ou } n. \end{cases}$$

2.2 Homologie singulière

But : Montrer que, à isomorphisme canonique près, $H_n^\Delta(X)$ ne dépend pas du choix de la structure de Δ-complexe sur X.

Déf. : Soit X un espace topologique. Un <u>n-simplexe singulier</u> de X est une application continue $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$. Le <u>groupe des n-chaînes</u> de X est le groupe abélien libre $C_n(X)$ de base l'ensemble des n-simplexes singuliers de X. L'<u>homomorphisme bord</u> $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ est défini par

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma \circ s_i .$$