Lemme 4 ("lemme des cinq") : Soit un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 l'est aussi.

Rque : Il suffit de supposer que f_2 et f_4 sont des isomorphismes, f_1 est surjectif et f_5 est injectif.

Dém. : Montrons la surjectivité de f_3. Soit $b_3 \in B_3$. Soit $b_4 = \beta_3(b_3)$.
Comme f_4 est surjectif, il existe $a_4 \in A_4$ tel que $f_4(a_4) = b_4$.

On a
$$f_5\alpha_4(a_4) = \beta_4 f_4(a_4) = \beta_4(b_4) = \beta_4\beta_3(b_3) = 0.$$

Comme f_5 est injectif, on a donc $\alpha_4(a_4) = 0$. Comme la première ligne est exacte en A_4, on a $a_4 = \alpha_3(a_3')$ pour un $a_3' \in A_3$.

On a
$$\beta_3 f_3(a_3') = f_4\alpha_3(a_3') = b_4 = \beta_3(b_3)$$

Donc $b_3 - f_3(a_3')$ est dans $\ker\beta_3$. Comme la 2e ligne est exacte en B_3, on a $b_3 - f_3(a_3') = \beta_2(b_2)$ pour un $b_2 \in B_2$. Comme f_2 est surjectif, on a $b_2 = f_2(a_2)$ pour un $a_2 \in A_2$. Posons $a_3'' = \alpha_2(a_2)$.

On a
$$\begin{aligned} f_3(a_3' + a_3'') &= f_3(a_3') + f_3\alpha_2(a_2) = f_3(a_3') + \beta_2 f_2(a_2) \\ &= f_3(a_3') + b_3 - f_3(a_3') = b_3. \end{aligned}$$

Injectivité de f_3 : exercice !

✓

Lemme 5 : Soit un complexe

$$C : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Alors on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Cok}(C_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\partial_n) \simeq H_n C \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}\,\partial_{n+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_n} C_{n-1}).$$

Dém. : L'isomorphisme de gauche est la définition de H_nC.

À droite, nous avons

$$\mathrm{Ker}(\,C_n / \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} C_{n-1}) = \mathrm{Ker}(\partial_n) / \mathrm{Im}(\partial_{n+1}).$$ ✓

Dém. du théorème 1 : Nous avons la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Considérons le diagramme aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{I}) & 0 \arrow[rr] & & C_{n+2} \arrow[rr] \arrow[d] & & D_{n+2} \arrow[rr] \arrow[d] & & E_{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[rr] & & C_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & D_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[ddd] & 0 \\
(\mathrm{II}) & & Y_nC \arrow[rr] \arrow[d] & & Y_nD \arrow[rr] \arrow[d] & & Y_nE \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & Z_nC \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z_nD \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z_nD \arrow[dr] & & \\
(\mathrm{III}) & 0 \arrow[rr] & & C_n \arrow[rr] \arrow[d] & & D_n \arrow[rr] \arrow[d] & & E_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[rr] & & C_{n-1} \arrow[rr] & & D_{n-1} \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $Y_nC = \mathrm{Cok}(\partial_{n+2})$. Clairement $Y_nD \to Y_nE$ est surjectif et $Z_nC \to Z_nD$ est injectif. Le lemme du serpent appliqué à (I) resp. (III) donne que la première resp. la 2^e ligne de (II) est exacte. Par le lemme 5, si on applique le lemme du serpent à (II), on obtient la suite recherchée

$$H_nC \longrightarrow H_nD \longrightarrow H_nE \xrightarrow{\delta} H_{n-1}C \longrightarrow H_{n-1}D \longrightarrow H_{n-1}E.$$

✓

Déf : Un morphisme de complexes $f : C \to D$ est un <u>quasi-isomorphisme</u> si $H_n(f) : H_nC \to H_nD$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$.

Cor. 6 : Soit un diagramme de complexes aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si deux quelconques parmi f, g et h sont des quasi-isomorphismes, le troisième l'est aussi.

Dém. : Par le théorème 1, on a un diagramme aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots \to & \boxed{H_nC} & \to & H_nD & \to & H_nE & \to & H_{n-1}C & \to & H_{n-1}D & \to & H_{n-1}E & \to \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle H_nf} & & \downarrow{\scriptstyle H_ng} & & \downarrow{\scriptstyle H_nh} & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}f} & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}g} & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}h} & \\ \cdots \to & H_nC' & \to & H_nD' & \to & H_nE' & \to & H_{n-1}C' & \to & H_{n-1}D' & \to & H_{n-1}E' & \to \cdots \end{array}$$

On obtient l'affirmation en appliquant le lemme des cinq à un sous-diagramme convenable, par exemple à la partie encadrée si on veut montrer que h est un quasi-isom. si f et g le sont. ✓

Cor. 7 : Soient X un espace topologique et $A \subset X$ un ss-espace. L'injection $A \to X$ induit un isom. $H_nA \to H_nX$ ssi $H_n(X, A) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Dém. : On applique le Cor. 6 au diagramme aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X,A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

✓

Cor. 8 : Soient X un espace top. et $B \subset A \subset X$ des sous-espaces. Alors on a une suite exacte canonique et fonctorielle

$$\dots \longrightarrow H_n(A,B) \longrightarrow H_n(X,B) \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A,B) \longrightarrow \dots$$

Dém. : Rappelons que si $L \subset M \subset N$ sont des sous-groupes d'un groupe abélien N on a l'isomorphisme d'Emmy Noether

$$N/M \xrightarrow{\sim} N/L \,/\, M/L.$$

Autrement dit, on a la suite exacte

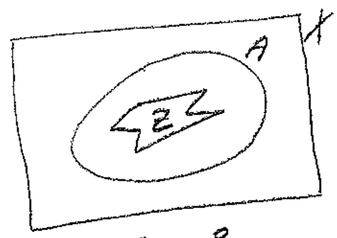
$$0 \longrightarrow M/L \longrightarrow N/L \longrightarrow N/M \longrightarrow 0.$$

D'où une suite exacte des complexes de chaînes relatifs :

$$0 \longrightarrow C(A,B) \longrightarrow C(X,B) \longrightarrow C(X,A) \longrightarrow 0.$$

On obtient la suite de l'énoncé grâce au Thm 1. ✓

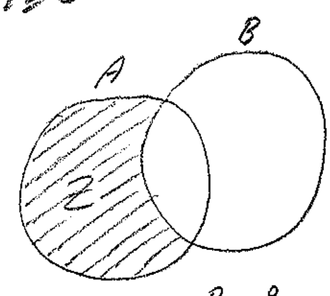
2.6 Énoncé du théorème d'excision, application



$\bar{Z} \subset \mathring{A}$

Thm 1 (excision) : Soient X un espace top. et $Z \subset A \subset X$ des sous-espaces tels que l'adhérence de Z est contenue dans l'intérieur de A. Alors l'inclusion $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X,A)$ induit des isomorphismes en homologie relative

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\sim} H_n(X,A), \quad \forall n \geq 0.$$



$X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Thm 2 : Soient X un espace top. et A, B des sous-espaces dont la réunion des intérieurs est X. Alors l'inclusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X,A)$ induit des isomorphismes en homologie relative

$$H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\sim} H_n(X,A), \quad \forall n \geq 0.$$

Rque : Les théorèmes sont équivalents : on pose $Z = B \setminus A$ pour déduire le Thm 2 du Thm 1 et $B = X \setminus Z$ pour la réciproque.

Exercice : Soient $U \subset \mathbb{R}$ et $V \subseteq \mathbb{R}^2$ des ouverts non vides. Montrer que U et V ne sont pas homéomorphes.

Cor. 3 (Brouwer ~ 1910, "invariance de la dimension") : Soient $U \subseteq \mathbb{R}^m$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$ des ouverts non vides. Si U est homéomorphe à V, alors $m = n$.

Dém. : Soit x un point de U. Par le thm d'excision, on obtient pour tout $k \geq 0$ un isomorphisme (prendre $Z = \mathbb{R}^m \setminus U$)

$$H_k(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}).$$

On a la suite exacte

$$\cdots \to \underbrace{H_k(\mathbb{R}^m)}_{=0} \to H_k(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \to H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \to \underbrace{H_{k-1}(\mathbb{R}^m)}_{=0} \to \cdots$$

$$\cdots \to H_0(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\sim} H_0(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \to H_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \to 0.$$

On en déduit que

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} H_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}), & k \geq 1 \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Autrement dit, on a

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}),$$

où $\tilde{H}_k$ est l'homologie réduite. L'inclusion $S^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ est une équivalence d'homotopie. (où la sphère S^{m-1} est centrée en x)

Donc

$$H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $f: U \to V$ est un homéomorphisme, il induit des isomorphismes $H_k(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} H_k(V, V \setminus \{f(x)\})$.

Donc on doit avoir $m = n$. ✓

2.7 Démonstration des théorème d'excision et de Mayer-Vietoris

Déf.: Soient X un espace top. et $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ une famille de sous-espaces dont les intérieurs recouvrent X. Une n-chaîne $\sum_{i=1}^{r} a_i \sigma_i$ est <u>$\mathcal{U}$-petite</u> si chaque simplexe $\sigma_i : \Delta^n \to X$ prend ses valeurs dans l'un des U_j (j dépend de i). On note $C^{\mathcal{U}}(X) \subset C(X)$ le sous-complexe des n-chaînes $\mathcal{U}$-petites et $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ son homologie, $n \geq 0$.

Thm 1 (petites chaînes): L'inclusion $C^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C(X)$ est un quasi-isomorphisme.