Si $f : U \to V$ est un homéomorphisme, il induit des isomorphismes $H_k(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} H_k(V, V \setminus \{f(x)\})$.

Donc on doit avoir $m = n$. ✓

2.7 Démonstration des théorèmes d'excision et de Mayer-Vietoris

Déf.: Soient X un espace top. et $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ une famille de sous-espaces dont les intérieurs recouvrent X. Une n-chaîne $\sum_{i=1}^{r} a_i \sigma_i$ est $\underline{\mathcal{U}\text{-petite}}$ si chaque simplexe $\sigma_i : \Delta^n \to X$ prend ses valeurs dans l'un des U_j (j dépend de i). On note $C^{\mathcal{U}}(X) \subset C(X)$ le sous-complexe des n-chaînes $\mathcal{U}$-petites et $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ son homologie, $n \geq 0$.

Thm 1 (petites chaînes): L'inclusion $C^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C(X)$ est un quasi-isomorphisme.

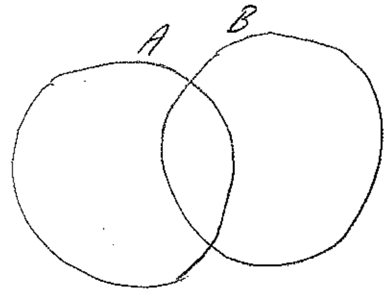
Rque: Rappelons (section 2.3) que deux morphismes de complexes $f, g : C \rightrightarrows D$ sont $\underline{\text{homotopes}}$ s'il existe une homotopie $H : C \to D$ (i.e. une famille d'homomorphismes $H_n : C_n \to D_{n+1}$, $n \geq 0$) telle que $f_n - g_n = \partial H_n - H_{n-1}\partial$, $n \geq 0$. Écrivons $f \sim g$ si f et g sont homotopes. Alors on a

$f \sim g \Rightarrow fh \sim gh$ et $kf \sim kg$ pour tous h, k composables avec f, g.

En outre, on a $f \sim g \Rightarrow H_n(f) = H_n(g)$, $\forall n$ (Cor. 2.3.2).

Un morphisme $f : C \to D$ est une $\underline{\text{équivalence d'homotopie}}$ s'il existe $g : D \to C$ t.q. $f \circ g \sim \mathbb{1}_D$ et $g \circ f \sim \mathbb{1}_C$.

Il est alors clair que <u>toute équivalence d'homotopie est un quasi-isomorphisme</u>. Nous allons montrer (section 2.8) que $C^{\mathcal{U}}(X) \to C(X)$ est en fait une équivalence d'homotopie.



$X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Dém. du théorème d'excision (Thm 2.6.2):

On aimerait montrer que

$$C(B, A\cap B) \longrightarrow C(X, A)$$

est un quasi-isomorphisme. Soit $\mathcal{U} = \{A, B\}$.

On a $C(A) \subseteq C^{\mathcal{U}}(X)$ et $C^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C(X)$ est un quasi-isomorphisme par le Thm 1.. D'où un quasi-isomorphisme

$$C^{\mathcal{U}}(X) / C(A) \longrightarrow C(X, A)$$

(Cor. 2.5.6). Il suffit de montrer que le morphisme can.

$$C(B, A\cap B) = C(B)/C(A\cap B) \longrightarrow C^{\mathcal{U}}(X)/C(A)$$

est un isomorphisme de complexes. Notons $S_n(A)$ etc. l'ensemble des n-simplexes de A. Alors $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ est libre de base $S_n(A) \cup S_n(B)$ et $C_n(A)$ libre de base $S_n(A)$. Donc $C_n^{\mathcal{U}}(X) / C_n(A)$ est libre de base l'image de

$$\begin{aligned}(S_n(A) \cup S_n(B)) \setminus S_n(A) &= S_n(B) \setminus (S_n(B) \cap S_n(A)) \\ &= S_n(B) \setminus S_n(B\cap A)\end{aligned}$$

Or l'image de cette partie est aussi une base de $C_n(B) / C_n(A\cap B)$. ✓

Dém. du théorème de Mayer-Vietoris (Thm 2.4): Soient A, B, X comme ci-dessus. On aimerait montrer que l'on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_n(A\cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

Soit $\mathcal{U}=\{A,B\}$. On a le quasi-isomorphisme $C^{\mathcal{U}}(X)\to C(X)$ par le Thm 1. Donc il suffit de construire une suite exacte

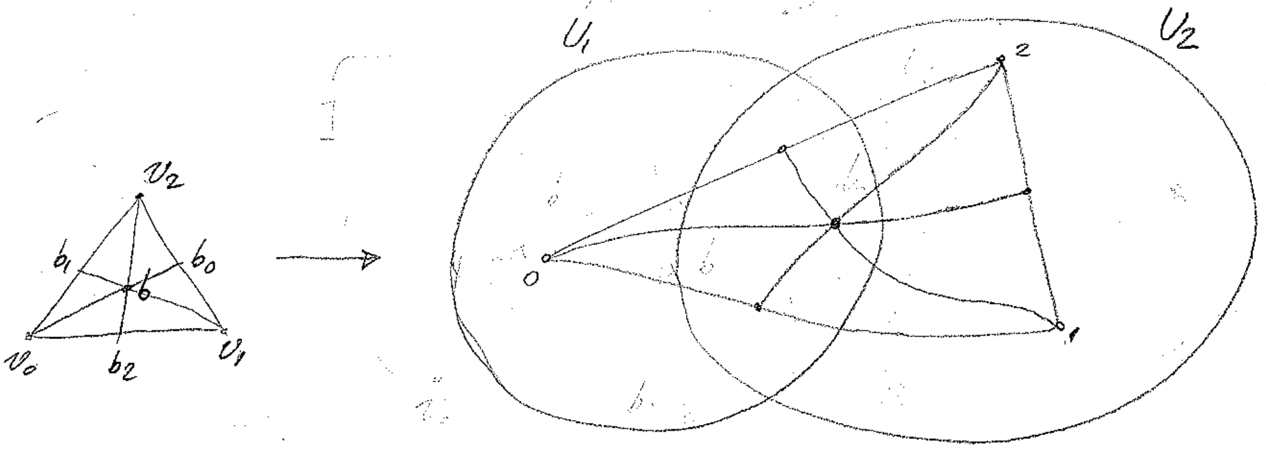
$$\cdots \longrightarrow H_n(A\cap B)\longrightarrow H_n(A)\oplus H_n(B)\longrightarrow H_n^{\mathcal{U}}(X)\longrightarrow H_{n-1}(A\cap B)\longrightarrow \cdots$$

Or en considérant des bases comme ci-dessus, on voit qu'on a une suite exacte de complexes

$$0\longrightarrow C(A\cap B)\longrightarrow C(A)\oplus C(B)\longrightarrow C^{\mathcal{U}}(X)\longrightarrow 0.$$

D'où la suite recherchée par le thm 2.5.1. ✓

2.8 Subdivision barycentrique et démonstration du théorème sur les petites chaînes



Idée : Toute chaîne c à valeurs dans $\bigcup_{j\in J} U_j$ est homologue à une chaîne de simplexes, chacun à valeurs dans l'un des U_j, plus des contributions provenant de $\partial(c)$:

$$\partial[b,v_0,v_1,v_2] = \underbrace{[v_0,v_1,v_2]}_{\sigma} - \underbrace{[b,v_1,v_2]+[b,v_0,v_2]-[b,v_0,v_1]}_{\sigma_0-\sigma_1+\sigma_2}$$

$$\sigma \sim \sigma_0-\sigma_1+\sigma_2$$

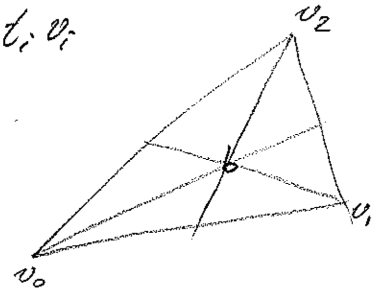
$$\partial[b_0,b,v_1,v_2] = \underbrace{[b,v_1,v_2]}_{\sigma_0} - \underbrace{[b_0,v_1,v_2]+[b_0,b,v_2]-[b_0,b,v_1]}$$

$$\sigma_0 \sim \text{(contrib. de } \partial c) + \sigma_{00} + \sigma_{01}$$

2.8.1 Subdivision barycentrique d'un simplexe affine dans $\mathbb{R}^n$

Déf : Pour $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$, notons $[v_0, \dots, v_n]$ le <u>n-simplexe affine</u>

$$\Delta^n \longrightarrow \mathbb{R}^N, \ (t_0, \dots, t_n) \longmapsto \sum t_i v_i$$



Son <u>barycentre</u> est le point

$$b = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i .$$

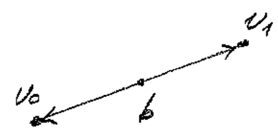
Rque : L'image de $[v_0, \dots, v_n]$ est l'enveloppe convexe de $v_0, \dots, v_n$ et b est son centre de gravité (masses égales).

Déf : La subdivision barycentrique d'un n-simplexe affine est une famille de n-simplexes définie par récurrence sur n :

$n = 0$: La subdivision bar. de $[v_0]$ est lui-même.

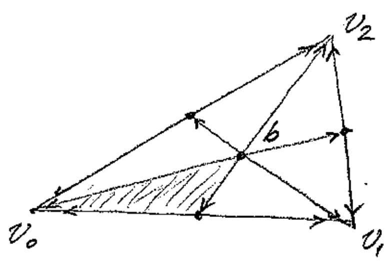
$n > 0$: La subdivision bar. de $[v_0, \dots, v_n]$ est la famille des simplexes $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$, où b est le barycentre de $[v_0, \dots, v_n]$ et $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ un $(n-1)$-simplexe de la subdiv. bar. d'une face $[v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n]$.

Exemples : $[v_0] \underset{\text{subd. bar.}}{\rightsquigarrow} [v_0]$



$[v_0, v_1] \rightsquigarrow [b, v_1]$ et $[b, v_0]$

$[v_0, v_1, v_2] \rightsquigarrow$ six 2-simplexes :



Rques : 1) Les sommets des simplexes de la subdivision barycentrique de $[v_0, \dots, v_n]$ sont

- $v_0, \dots, v_n$
- les milieux $\frac{1}{2}(v_i + v_j)$, $i<j$
- les barycentres $\frac{1}{3}(v_i + v_j + v_k)$, $i<j<k$,

et plus généralement les barycentres

$$\frac{1}{k+1}(v_{i_0}+\dots+v_{i_k}), \quad i_0<\dots<i_k, \quad 0\le k\le n$$

de toutes les faces $[v_{i_0},\dots,v_{i_k}]$ de $[v_0,\dots,v_n]$.

2) La réunion de toutes les faces de tous les simplexes de la subdiv. bar. est une structure de Δ-complexe sur l'image de $[v_0,\dots,v_n]$.

Déf : Le <u>diamètre</u> d'une partie compacte K de $\mathbb{R}^N$ est

$$\operatorname{diam}(K) := \max_{x,y\in K} |x-y|.$$

Le <u>diamètre d'un simplexe</u> $\operatorname{diam}[v_0,\dots,v_n]$ est le diamètre de son image.

Lemme 1 : a) $\operatorname{diam}[v_0,\dots,v_n] = \max_{0\le i,j\le n} |v_i - v_j|$

b) Si $[w_0,\dots,w_n]$ est un simplexe de la subdivision barycentrique de $[v_0,\dots,v_n]$, alors

$$\operatorname{diam}[w_0,\dots,w_n] \le \frac{n}{n+1}\operatorname{diam}[v_0,\dots,v_n].$$

Dém. : a) Soient $v\in\mathbb{R}^N$ et $(t_0,\dots,t_n)\in\Delta^n$. On a

$$\left|v-\sum_{i=0}^n t_i v_i\right| = \left|\sum t_i(v-v_i)\right| \le \sum t_i |v-v_i| \qquad (*)$$

$$\le \sum_i t_i \max_j |v-v_j| = \max_j |v-v_j|$$

Si v est un point de $[v_0,\dots,v_n]$, on obtient, en appliquant $(*)$ une deuxième fois, que

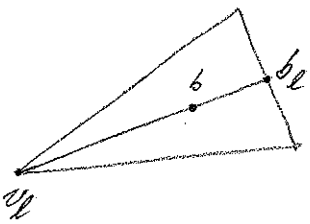
$$\left|v-\sum t_i v_i\right| \le \max_j |v-v_j| \le \max_j \max_i |v_i - v_j|.$$

b) Par a), il s'agit de montrer que

$$\max |w_i - w_j| \leq \frac{n}{n+1} \max |v_i - v_j|$$

Si $w_i \neq b$ et $w_j \neq b$, alors w_i et w_j appartiennent à un simplexe de la subdivision barycentrique d'une face $[v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_n]$ de $[v_0, \dots, v_n]$. Par récurrence, on a

$$|w_i - w_j| \leq \frac{n-1}{n} \max_{i,j \neq k} |v_i - v_j| \leq \frac{n}{n+1} \max_{i,j} |v_i - v_j| .$$



Supposons que $w_j = b$. Le sommet w_i est de la forme $\frac{1}{k+1}(v_{i_0} + \dots + v_{i_k})$ pour certains sommets $v_{i_0}, \dots, v_{i_k}$. Par (*), on peut supposer que $w_i = v_\ell$ pour un ℓ.

Soit

$$b_\ell = \text{barycentre de } [v_0, \dots, \widehat{v_\ell}, \dots, v_n] = \frac{1}{n}(v_0 + \dots + \widehat{v_\ell} + \dots + v_n)$$

On a
$$b = \frac{1}{n+1} v_\ell + \frac{n}{n+1} b_\ell \quad \in [v_\ell, b_\ell].$$

$$|b - v_\ell| = \left| \frac{n}{n+1} b_\ell - \frac{n}{n+1} v_\ell \right| = \frac{n}{n+1} |b_\ell - v_\ell|$$
$$\leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam} [v_0, \dots, v_n]. \quad \checkmark$$

2.8.2 Subdivision barycentrique des chaînes affines

Soit $Y \subset \mathbb{R}^N$ une partie convexe.

Déf. : Un <u>simplexe affine de Y</u> est un simplexe affine $[v_0, \dots, v_n]$ d'image dans Y. Une <u>n-chaîne affine de Y</u> est une n-chaîne $\sum a_i \sigma_i$ où les σ_i sont des n-simplexes affines de Y.

Rque : Le bord d'un simplexe affine de Y est encore un simplexe affine de Y.

Déf : Le <u>complexe des chaînes affines</u> $AC(Y)$ est le sous-complexe de $C(Y)$ formé des chaînes affines.
Le <u>complexe augmenté des chaînes affines</u> $AC^+(Y)$ est le complexe

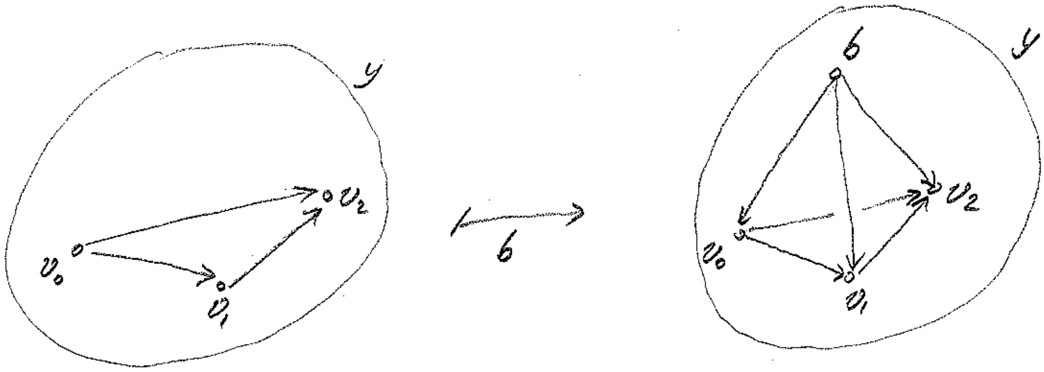
$$AC^+(Y): \quad \dots \to AC_n(Y) \to \dots \to AC_1(Y) \to AC_0(Y) \xrightarrow{\partial_0} AC_{-1}(Y) \to 0$$

où $AC_{-1}(Y) = \mathbb{Z}\cdot[\,]$ ($[\,]$ = le simplexe vide) et $\partial_0[v_0] = [\,]$ pour tout 0-simplexe $[v_0]$.

Déf. : Soit b un point de Y. On note encore $b : AC^+(Y) \to AC^+(Y)$ l'homotopie telle que

$$b[v_0, \dots, v_n] = [b, v_0, \dots, v_n] \quad , \; n \geq -1.$$

Exemple :



Lemme : On a $\partial \circ b + b \circ \partial = \mathbb{1}_{AC^+(Y)}$.

Rque : Donc l'identité de $AC^+(Y)$ est homotope au morphisme nul $AC^+(Y) \to AC^+(Y)$. Cela veut dire que $AC^+(Y)$ est un <u>complexe contractile</u>. Cela reflète le fait que Y est un espace contractile (en tant que partie convexe de $\mathbb{R}^N$).

Dém. : On a
$$\begin{aligned}\partial b[v_0, \dots, v_n] &= \partial[b, v_0, \dots, v_n] \\ &= [v_0, \dots, v_n] - \sum (-1)^i [b, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &= [v_0, \dots, v_n] - b\,\partial[v_0, \dots, v_n]\end{aligned}$$

et donc $\quad \partial \circ b = \mathbb{1}_{AC^+(Y)} - b \circ \partial$. ✓