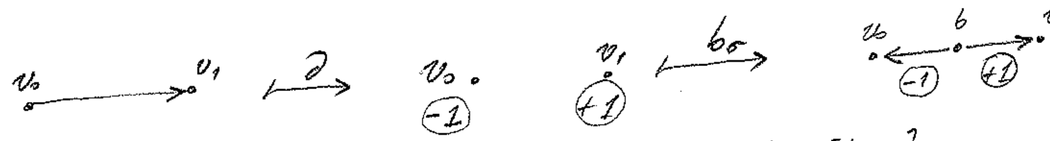
Déf : L'opérateur de <u>subdivision barycentrique</u> $S : AC^+(Y) \longrightarrow AC^+(Y)$ est défini par récurrence :

- $S[\,] := [\,]$
- Si $\sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe affine et b_σ son barycentre, on pose $S\sigma := b_\sigma S \partial\sigma$. $(\Rightarrow S[v_0] = [v_0])$

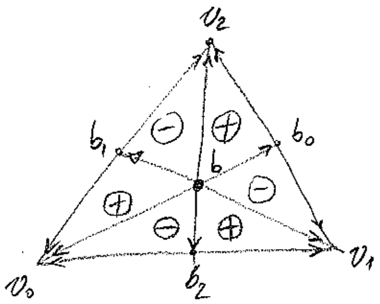
Exemples : $n = 1$:



$$S([v_0, v_1]) = bS([v_1] - [v_0]) = [b, v_1] - [b, v_0].$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} S([v_0, v_1, v_2]) &= bS([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) \\ &= b\big([b_0, v_2] - [b_0, v_1] - [b_1, v_2] + [b_1, v_0] \\ &\qquad + [b_2, v_1] - [b_2, v_0]\big) \\ &= [b, b_0, v_2] - [b, b_0, v_1] - [b, b_1, v_2] + [b, b_1, v_0] \\ &\quad + [b, b_2, v_1] - [b, b_2, v_0]. \end{aligned}$$



Lemme 2 : On a $S\partial = \partial S$, i.e. $S : AC^+(Y) \to AC^+(Y)$ est un morphisme de complexes.

Dém. : Soit σ un n-simplexe affine. Pour $n = 0$, on a bien $S\partial\sigma = \partial S\sigma$.

Supposons $n > 0$. On a

$$\begin{aligned} \partial S\sigma &= \partial b_\sigma S\partial\sigma \qquad \big\downarrow\ \mathbb{1} = \partial b_\sigma + b_\sigma \partial \\ &= (\mathbb{1} - b_\sigma\partial) S\partial\sigma \\ &= S\partial\sigma - b_\sigma \partial S \partial\sigma \underset{\text{réc.}}{=} S\partial\sigma - bS\partial\partial\sigma = S\partial\sigma. \end{aligned}$$

✓

Lemme 3 : Il existe une homotopie $T : AC(Y) \longrightarrow AC(Y)$ telle que $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$.

Dém. : On va construire $T : AC^+(Y) \longrightarrow AC^+(Y)$ tel que $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$ sur $AC^+(Y)$ et que $T_{-1} = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & AC_1(Y) \arrow[r] \arrow[dl, "T_1"'] \arrow[d, "\mathbb{1}-S_1"] & AC_0(Y) \arrow[r] \arrow[dl, "T_0"'] \arrow[d, "\mathbb{1}-S_0"] & AC_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[dl, "T_{-1}=0"'] \arrow[d, "1-S_{-1}=0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & AC_1(Y) \arrow[r] & AC_0(Y) \arrow[r] & AC_{-1}(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Alors la restriction de T à $AC(Y) \subset AC^+(Y)$ conviendra.

On définit T par récurrence :

- $T_{-1} = 0$
- $T_n(\sigma) = b_\sigma(\sigma - T_{n-1}\partial\sigma)$ pour $n \geq 0$.

Alors on a bien $(\partial T + T\partial)(\sigma) = (\mathbb{1} - S)(\sigma)$ pour $\sigma \in AC_{-1}(Y)$.

Supposons que $n \geq 0$ et $\sigma \in AC_n(Y)$: Alors on a

$$\begin{aligned}
\partial T_n(\sigma) &= \partial b_\sigma(\sigma - T_{n-1}\partial\sigma) && \partial b_\sigma = \mathbb{1} - b_\sigma\partial \\
&= (\mathbb{1} - b_\sigma\partial)(\sigma - T_{n-1}\partial\sigma) \\
&= \sigma - T_{n-1}\partial\sigma - b_\sigma(\underbrace{\partial\sigma}_{=\sigma'} - \partial T_{n-1}\underbrace{\partial\sigma}_{=\sigma'}) && \text{réc.} \\
&= \sigma - T_{n-1}\partial\sigma - b_\sigma(S\underbrace{\partial\sigma}_{\sigma'} + T\underbrace{\partial\underbrace{\partial\sigma}_{\sigma'}}_{=0}) && \text{déf. de } S \\
&= \sigma - T_{n-1}\partial\sigma - S\sigma
\end{aligned}$$

2.8.3 Subdivision barycentrique générale

Soit X un espace topologique.

Rque : Tout n-simplexe $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ est une application continue.
Donc il induit un morphisme de complexes : $\sigma_* : C(\Delta^n) \longrightarrow C(X)$.
Le complexe $C(\Delta^n)$ a une n-chaîne distinguée : le n-simplexe identique $\mathbb{1}_{\Delta^n} : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$.

C'est même une n-chaîne affine de $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Déf. : On définit $S : C(X) \longrightarrow C(X)$ par $S\sigma := \sigma_*(S 1\!\!1_{\Delta^n})$
pour tout n-simplexe σ de X.

Rque : $S(1\!\!1_{\Delta^n})$ est combinaison linéaire de certains n-simplexes de Δ^n.
$S\sigma$ est la combinaison linéaire de leurs images par σ.

Lemme 1 : $S : C(X) \longrightarrow C(X)$ est un morphisme de complexes.

Dém. : On a

$$\partial S\sigma = \partial \sigma_*(S 1\!\!1_{\Delta^n}) = \sigma_*(\partial S 1\!\!1_{\Delta^n}) = \sigma_*(S \partial 1\!\!1_{\Delta^n}) \quad (L2.8.2.2)$$

Rappelons que $s_i : \Delta_i^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ est l'inclusion de la i-ième face
et que $\partial\tau = \sum (-1)^i \tau \circ s_i$ pour tout simplexe τ. Nous avons donc

$$\partial S\sigma = \sigma_*\left(S\left(\sum (-1)^i s_i\right)\right) = \sum (-1)^i \sigma_* S(s_i) = \sum (-1)^i \sigma_*(S 1\!\!1_{\Delta^{n-1}} \circ s_i)$$

$$= \sum (-1)^i \sigma_* s_{i*} S(1\!\!1_{\Delta^{n-1}}) = \sum (-1)^i (\sigma s_i)_* S(1\!\!1_{\Delta^{n-1}})$$

$$= \sum (-1)^i S(\sigma s_i) = S\left(\sum (-1)^i \sigma s_i\right) = S\partial\sigma. \quad \checkmark$$

Déf. : On définit $T : C(X) \longrightarrow C(X)$ par $T\sigma = \sigma_* T(1\!\!1_{\Delta^n})$.

Lemme 2 : On a $T\partial + \partial T = 1\!\!1 - S \;: C(X) \longrightarrow C(X)$.

Dém. : On a

$$\partial T\sigma = \partial \sigma_* T(1\!\!1_{\Delta^n}) = \sigma_*(\partial T 1\!\!1_{\Delta^n})$$

$$= \sigma_*(1\!\!1_{\Delta^n} - S 1\!\!1_{\Delta^n} - T\partial 1\!\!1_{\Delta^n}) \quad (L2.8.2.3)$$

Comme au Lemme 1, on montre que $\sigma_* T\partial 1\!\!1_{\Delta^n} = T\partial\sigma$. D'où

$$\partial T\sigma = \sigma - S\sigma - T\partial\sigma$$

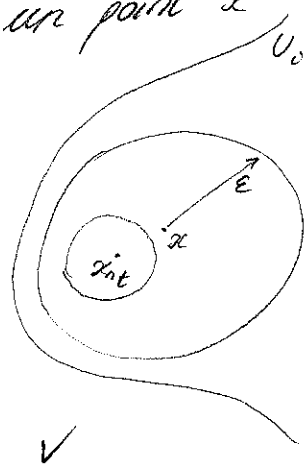
$$= (1\!\!1 - S - T\partial)(\sigma). \quad \checkmark$$

2.8.4 Subdivision barycentrique itérée

Lemme 1 : Soient K un espace métrique compact et $(V_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts qui recouvre K. Alors il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que toute boule de K de rayon $< \lambda$ est contenue dans l'un des U_i.

Rque : On appelle λ un nombre de Lebesgue pour le recouvrement.

Dém. : Supposons qu'un tel nombre λ n'existe pas. Alors pour tout $n > 0$, il existe un point $x_n \in K$ tel que la boule de centre x_n et de rayon $1/n$ n'est contenue dans aucun des U_i. Comme K est compact, il existe une suite extraite x_{n_t}, $t \in \mathbb{N}$, qui converge vers un point x de K. Soit $i \in I$ tel que x est contenue dans U_i. Soit $\varepsilon > 0$ t.q. la boule centrée en x de rayon ε est contenue dans U_i. Soit $t \in \mathbb{N}$ t.q. $d(x, x_{n_t}) < \varepsilon/2$ et $1/n_t < \varepsilon/2$. Alors la boule centrée en x_{n_t} de rayon $1/n_t$ est contenue dans $B_\varepsilon(x)$ et donc dans U_i. ↯. ✓



Lemme 2 : Soient $m \geq 1$ et $D_m = T(\mathbb{1} + S + \dots + S^{m-1})$. Alors on a

$$(1) \qquad (\mathbb{1} - S^m) = \partial D_m + D_m \partial. \qquad (1)$$

Dém. : On a

$$\mathbb{1} - S^m = (\mathbb{1} - S)(\mathbb{1} + S + S^2 + \dots + S^{m-1})$$

$$\underset{L\,2.8.3.2}{=} (T\partial + \partial T)(\mathbb{1} + S + S^2 + \dots + S^{m-1})$$

$$\underset{L\,2.8.3.1}{=} T(\mathbb{1} + S + \dots + S^{m-1})\partial + \partial T(\mathbb{1} + S + \dots + S^{m-1}). \quad ✓$$

Soient X un espace topologique et $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces dont les intérieurs recouvrent X.

Lemme 2 : Pour tout n-simplexe $\sigma : \Delta^n \to X$, il existe un entier $m(\sigma) \geq 0$ tel que $S^{m(\sigma)}\sigma$ appartient à $C^{\mathcal{U}}(X)$.

Dém. : Les ouverts $\sigma^{-1}(\mathring{U}_j)$ recouvrent l'espace métrique compact Δ^n. Soit λ un nombre de Lebesgue pour ce recouvrement (Lemme 1). Pour $m \geq 0$ les simplexes apparaissant dans $S^m(1\!\!1_{\Delta^n})$ sont de diamètre $\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^m \cdot \mathrm{diam}(\Delta^n)$. Comme la suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m$ tend vers 0 quand m tend vers 0, il existe un $m(\sigma) \geq 0$ tel que les simplexes apparaissant dans $S^{m(\sigma)}(1\!\!1_{\Delta^n})$ sont de diamètre $< \lambda$. Alors chacun est contenu dans l'un des $\sigma^{-1}(\mathring{U}_j)$ et donc chaque simplexe dans $S^{m(\sigma)}(\sigma) = \sigma_*\left(S^{m(\sigma)}(1\!\!1_{\Delta^n})\right)$ est contenu dans l'un des U_j. ✓

Pour chaque n-simplexe σ, fixons un choix de $m(\sigma)$ comme dans le lemme et tel que $m(\sigma)$ est minimal.

Déf. : Pour chaque n-simplexe σ, soit $D\sigma := D_{m(\sigma)}(\sigma)$. (avec les notations du Lemme 2). Soit $D : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ l'extension linéaire de l'application $\sigma \mapsto D\sigma$.

Rque : Nous avons

$$\begin{aligned}
\partial D\sigma + D\partial\sigma &= \partial D_{m(\sigma)}\sigma + D\partial\sigma \\
&= \partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D_{m(\sigma)}\partial\sigma + D\partial\sigma \\
&= \sigma - \underbrace{S^{m(\sigma)}(\sigma) - D_{m(\sigma)}\partial\sigma + D\partial\sigma}_{=g(\sigma)}.
\end{aligned}$$

Déf : Soit $\rho : C(X) \longrightarrow C(X)$ défini par

$$\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)} - D\partial\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma .$$

Lemme 3 : a) ρ est à valeurs dans $C^{\mathcal{U}}(X)$.

b) ρ est un morphisme de complexes $C(X) \to C^{\mathcal{U}}(X)$

c) Si $\imath : C^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C(X)$ est l'inclusion, on a

$\rho\imath = 1\!\!1_{C^{\mathcal{U}}(X)}$ et $1\!\!1_{C(X)} - \imath\rho = D\partial + \partial D$.

En particulier, $\imath$ est une équivalence d'homotopie.

Rque : On a donc démontré le thm sur les petites chaînes (Thm 2.7.1 p. 118).

Dém. : a) Par définition, $S^{m(\sigma)}\sigma$ est dans $C^{\mathcal{U}}(X)$. Nous avons

$$D\partial\sigma = \sum (-1)^j D\sigma_j = \sum (-1)^j D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$$
$$= \sum (-1)^j T(1\!\!1 + \dots + S^{m(\sigma_j)-1})(\sigma_j) , \quad (*)$$

où les σ_j sont les faces de σ. Nous avons $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$. Donc chacun des termes $(-1)^j TS^l(\sigma_j)$ de $(*)$ apparaît aussi dans $D_{m(\sigma)}\partial\sigma$. Donc $-D\partial\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma$ est une somme de termes $(-1)^j TS^l(\sigma_j)$, où $l \geq m(\sigma)$. Ces termes sont dans $C^{\mathcal{U}}(X)$ car $S^l\sigma_j$ est dans $C^{\mathcal{U}}(X)$ et T laisse stable $C^{\mathcal{U}}(X)$ (car T est exprimé en termes de l'identité, de l'operateur bord et d'opérateurs cône).

b) On a $\rho = Id_{C(X)} - \partial D - D\partial$ et $D\partial + \partial D$ est un morphisme de complexes.

c) Si $\sigma \in C^{\mathcal{U}}(X)$, alors $m(\sigma) = 0$. D'où $\rho\imath(\sigma) = \sigma$.

On a la 2^e égalité par la remarque qui précède la déf. de ρ. ✓