

2.9 Homologie simpliciale et homologie singulière

131

2.9.1 Homologie relative et homologie absolue

Def: Soit X un espace top. non vide. Le complexe de chaînes augmenté de X est

$$\tilde{C}(X): \dots \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

degré -1

où $\epsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$. L'homologie réduite de X

$$\text{est } \tilde{H}_n(X) = H_n(\tilde{C}(X)), n \geq 0.$$

Requis: 1) On a $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ pour tout $n \geq 1$.

2) Si X est contractile, on a $\tilde{H}_n(X) = 0, \forall n \geq 0$.

3) Si X a N compos. connexes par arcs, alors $H_0(X)$ est libre de rang N et $\tilde{H}_0(X)$ libre de rang $N-1$.

Prop 1: Soient (X, A) et (X', A') des paires d'espaces top. munies de ss-espaces. Soient

$$f: (X, A) \rightarrow (X', A') \text{ et } g: (X, A) \rightarrow (X', A')$$

des morph. de paires (i.e. $f: X \rightarrow X'$ est continue et $f(A) \subseteq A'$ et de même pour g). Soit F une homotopie relative de f à g , i.e.

$$F: X \times I \rightarrow X', F(A, t) \subseteq A', \forall t \in I$$

$$F|_{X \times \{0\}} = f \text{ et } F|_{X \times \{1\}} = g.$$

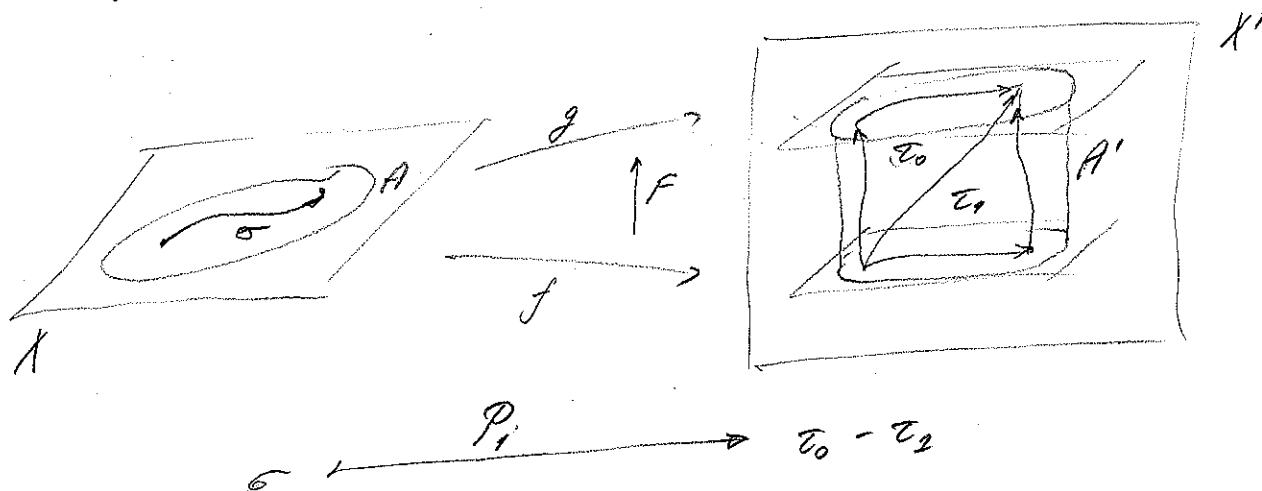
Alors f et g induisent le même appl. $H_n(X, A) \rightarrow H_n(X', A')$, pour tout $n \geq 0$.

Dém. : La dém. du thém 2.3.2 (p. 105) nous fournit
des "opérateurs prismatiques"

$$P_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X')$$

t.q. $C(g)_n - C(f)_n = \partial \cdot P_n + P_{n-1} \cdot \partial, \forall n \geq 0.$

P.ex.



La construction de P_n à partir de l'homotopie F
montre que P_n envoie $C_n(A)$ dans $C_n(A')$ pour tout $n \geq 0$.
Donc P_n induit un homom. bien défini :

$$\bar{P}_n : \begin{array}{ccc} C_n(X)/C_n(A) & \longrightarrow & C_{n+1}(X')/C_{n+1}(A') \\ \text{"} & & \text{"} \\ C_n(X, A) & & C_n(X', A') \end{array}$$

et on a clairement

$$C(g, A)_n - C(f, A)_n = \partial \cdot \bar{P}_n + \partial \cdot \bar{P}_{n-1}, \forall n \geq 0.$$

Donc les morphismes de complexes $C(f, A) : C(X, A) \rightarrow C(X, A)$
et $C(g, A)$ sont homotopes. Par le lemme 2.3.1, ils induisent
la même application en homologie. \checkmark

Corollaire 2: Soit $f: (X, A) \rightarrow (X', A')$ une équivalence d'homotopie de paires (i.e. il existe un morphisme de paires $g: (X', A') \rightarrow (X, A)$ t.q. $f \circ g$ est homotope, relativement à A' , à l'identité de X' , et de façon analogue pour $g \circ f$). Alors f induit un isom.

$$f: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X', A'), \quad \forall n \geq 0.$$

Lemme 3: Soit (X, α_0) un espace top. pointé. Alors on a un isom. canonique $\tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X, \alpha_0), \quad \forall n \geq 0.$

Dém.: On a la suite exacte longue

$$\begin{array}{c} \hookrightarrow H_n(\mathbb{Z}\alpha_0) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, \alpha_0) \rightarrow \\ \hookrightarrow H_{n-1}(\mathbb{Z}\alpha_0) \rightarrow \end{array}$$

et on sait que $H_{n-1}(\mathbb{Z}\alpha_0) = 0 = H_n(\mathbb{Z}\alpha_0)$ pour $n \geq 2.$

Donc $\tilde{H}_n(X) = H_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X, \alpha_0)$ pour $n \geq 2.$ On a

$$\begin{array}{c} \text{la suite exacte} \\ \xrightarrow{=0} H_1(\mathbb{Z}\alpha_0) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, \alpha_0) \rightarrow \\ \hookrightarrow H_0(\mathbb{Z}\alpha_0) \xrightarrow{\text{injection}} H_0(X) \rightarrow H_0(X, \alpha_0) \rightarrow 0 \end{array}$$

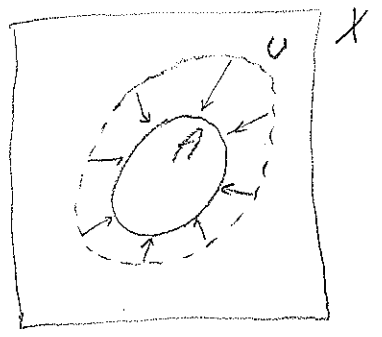
Donc $\tilde{H}_1(X) = H_1(X) \xrightarrow{\sim} H_1(X, \alpha_0).$ On vérifie facilement que l'application can.

$$\tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X, \alpha_0)$$

est un isomorphisme d'inverse induit par:

$$\text{classe de } \sum n_i \sigma_i \longmapsto \text{classe de } (\sum n_i \sigma_i) - (\sum n_i) \cdot \alpha_0 \quad \checkmark$$

Def: Une paire (X, A) est bonne si A est fermé et il existe un ouvert U de X contenant A et une rétraction par déformation de U sur A (i.e. si $i: A \rightarrow U$ est l'inclusion, on a $r: U \rightarrow A$ l.g.



$\dots r \circ i = \mathbb{1}_A$

$\dots i \circ r \sim_{\text{hfp}} \mathbb{1}_U$ par une hfpie relative à A .

Prop: Alors l'inclusion $(A, A) \hookrightarrow (U, A)$ est une eq. d'hopie de paires!

Thm 4: Pour une bonne paire (X, A) , la projection

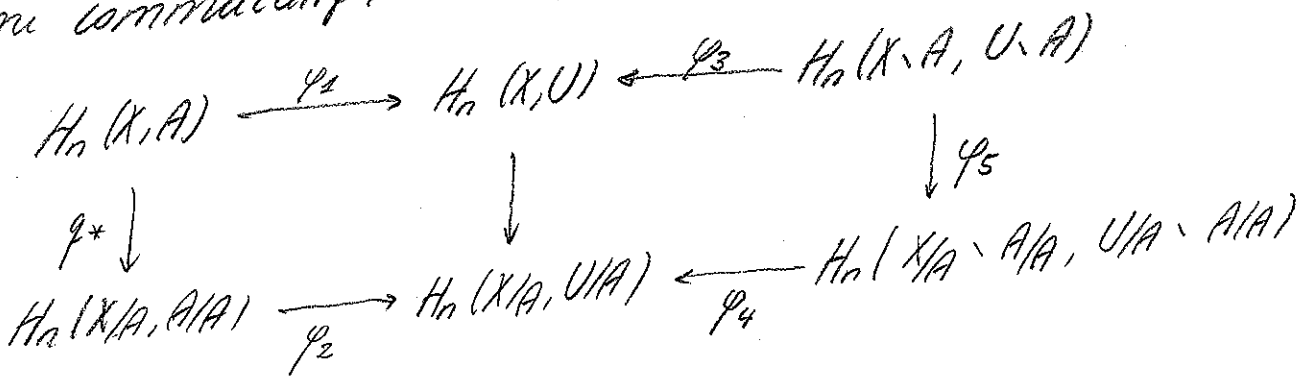
$$q: (X, A) \longrightarrow (X/A, A/A)$$

induit des isomorphismes

$$q_*: H_n(X, A) \xrightarrow{\sim} H_n(X/A, A/A) \xrightarrow[\cong]{\sim} \tilde{H}_n(X/A)$$

pour tout $n \geq 0$.

Dem.: Soit U comme dans la définition. Pour tout $n \geq 0$, on a un diagramme commutatif:



Etape 1: φ_2 est un isomorphisme.

Dem.: On a la suite exacte longue associée à $A \subset U \subset X$:

$$\dots \rightarrow H_n(U, A) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, U) \rightarrow H_{n-1}(U, A) \rightarrow \dots$$

Comme $(A, A) \hookrightarrow (U, A)$ est une equiv. d'homotopie de paires, on a $H_n(U, A) \simeq H_n(A, A)$. (Cor. 2)
 et bien sur $H_n(A, A) = 0, \forall n \geq 0$. Donc

$$H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, U)$$

est bien un isomorphisme.

Etape 2: φ_2 est un isomorphisme

Dém.: On a une equiv. d'homotopie de paires

$$(A/A, A/A) \longrightarrow (U/A, A/A)$$

et on peut utiliser le même argument qu'à l'étape 1.

Etape 3: φ_3 et φ_4 sont des isomorphismes.

Dém.: L'adhérence de A (égale à A) est contenue dans U et de même pour l'adhérence de A/A dans U/A . Donc le théorème d'excision s'applique.

Etape 4: φ_5 est un isomorphisme

Dém.: L'application de projection $X \longrightarrow X/A$ se restreint

à un homéomorphisme $X \setminus A \longrightarrow X/A \setminus A/A$ et qui

induit un homéomorphisme $U \setminus A \longrightarrow U/A \setminus A/A$. On a

donc un isomorphisme de paires $(X \setminus A, U \setminus A) \xrightarrow{\simeq} (X/A \setminus A/A, U/A \setminus A/A)$

Etape 5: L'affirmation résulte maintenant de la commutativité du diagramme. ✓

2.9.2 Bonnes paires associées aux Δ -complexes

Soit X un espace topologique.

Rappel : Une structure de Δ -complexe sur X est la donnée d'une famille d'applications $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X, \alpha \in \Delta$, telle que

- 1) la restriction de σ_α à $\overset{\circ}{\Delta}^{n_\alpha}$ est injective, $\forall \alpha \in \Delta$, et X est la réunion disjointe des images $\sigma_\alpha(\overset{\circ}{\Delta}^{n_\alpha})$;
- 2) pour chaque $\alpha \in \Delta$ et chaque face $\partial_i \Delta^{n_\alpha}$, la restriction de σ_α à $\partial_i \Delta^{n_\alpha}$ est égale à $\sigma_\beta : \Delta^{n_\beta} \rightarrow X$ pour un unique $\beta \in \Delta$ (donc $n_\beta = n_\alpha - 1$ et $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ d_i$)
- 3) Une partie U de X est ouverte ssi $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ est ouvert dans Δ^{n_α} pour tout $\alpha \in \Delta$.

① \triangleright Supposons que X est muni d'une structure de Δ -complexe.

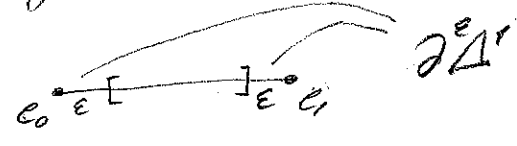
But : Pour tout sous- Δ -complexe fermé $A \subset X$, la paire (X, A) est bonne.

Def : Pour $n \geq 0$ et $0 < \epsilon < 1$, le bord épaissi $\partial^\epsilon \Delta^n$ est l'ensemble des points de la forme

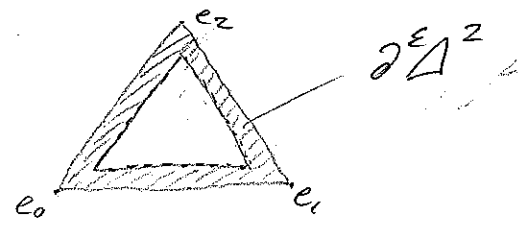
$$x = t \cdot b + (1-t) \cdot y$$

où b est le barycentre de Δ^n , $y \in \partial \Delta^n$ et $0 \leq t \leq \epsilon$.

Exemples: $n=1$:



$n=2$:



① Pour $n \geq 0$, le n -squelette X^n est la réunion des $\sigma_\alpha(\overset{\circ}{\Delta}^{n_\alpha})$, $n_\alpha \leq n$