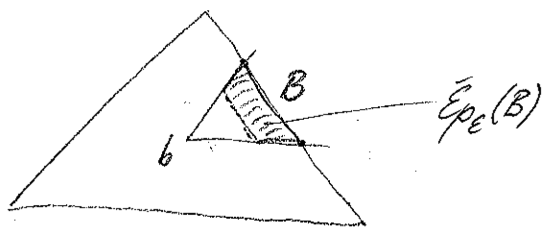
Rque : Par définition, le bord épaissi est un ouvert de Δ^n et le bord $\partial\Delta^n$ est un rétract par déformation du bord épaissi $\partial^\varepsilon\Delta^n$.

Déf : Pour une partie $B \subset \partial\Delta^n$ et $0<\varepsilon<1$, l'épaississement de B est la partie $\text{Ép}_\varepsilon(B)$ formée des points

$$x = t\cdot b + (1-t)y\ ,\quad 0 \leq t < \varepsilon,$$

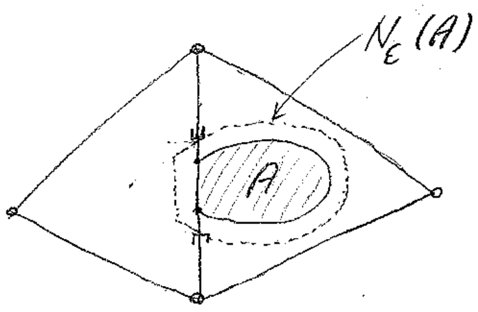
où b est le barycentre de Δ^n et $y \in B$.

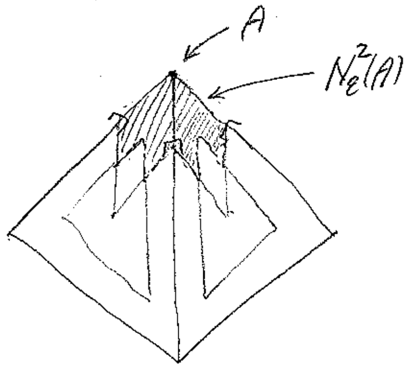
Exemple :



Rque : Si B est vide, alors $\text{Ép}_\varepsilon(B)$ est vide.

Rque : B est un rétract par déformation de $\text{Ép}_\varepsilon(B)$.





Constr. : Soit X un Δ-complexe et $A \subset X$ un fermé. Soit $\varepsilon : \Lambda \to]0,1[$.

Pour $0 \leq n$, soit X^n le n-squelette de X.

Soit

$$N_\varepsilon^0(A) = A \cap X^0$$

$N_\varepsilon^{n+1}(A)$ = partie de X^{n+1} t.q. pour tout $\alpha \in \Lambda$ t.q. $n_\alpha \leq n+1$ l'ensemble $\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(A))$ est égal à

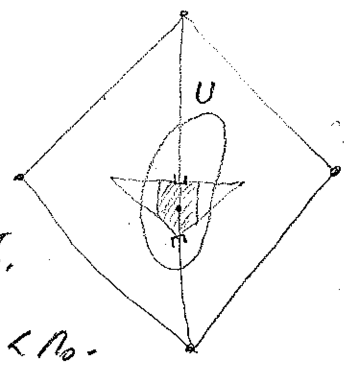
$$\text{Ép}_{\varepsilon(\alpha)}\left(\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))\right) \cup B_{\varepsilon(\alpha)}\left(\sigma_\alpha^{-1}(A) \setminus \partial\Delta^{n_\alpha}\right)$$

Lemme 1 : Soit x un point de X

a) Les $N_\varepsilon(x)$ forment une base de voisinages de x.

b) Chaque $N_\varepsilon(x)$ est contractile.

Dém. : a) Soit U un ouvert de X contenant x.



On a $x \in \sigma_{\alpha_0}(\mathring{\Delta}^{n_0})$ pour un unique simplexe σ_{α_0}. Soit n_0 sa dimension. On a $N_\varepsilon^n(x) = \emptyset$ pour $n < n_0$ pour tout $\varepsilon : \Lambda \to]0,1[$.
On choisit donc $\varepsilon(\alpha) = 1/2$ pour tout α t.q. $n_\alpha < n_0$.
On choisit $\varepsilon(\alpha_0)$ t.q. $\overline{B_{\varepsilon(\alpha_0)}(\sigma_{\alpha_0}^{-1}(x))} \subseteq \sigma_{\alpha_0}^{-1}(U)$
et on choisit $\varepsilon(\alpha) = 1/2$ pour tout autre simplexe σ_α de dim. n_0.
Alors $N_\varepsilon^n(x) = \emptyset$ pour $n < n_0$ et $\overline{N_\varepsilon^{n_0}(x)}$ est un voisinage Δ-compact[1] de x dans $X^{n_0} \cap U$. Pour $n > n_0$, on procède par récurrence sur $n > n_0$: On suppose par récurrence que $\overline{N_\varepsilon^{n-1}(x)}$ est un voisinage Δ-compact de x dans $X^{n-1} \cap U$.
Alors pour tout simplexe σ_α de dimension n, on peut trouver $0 < \varepsilon(\alpha) < 1$ t.q.

$$\overline{\acute{E}p_{\varepsilon(\alpha)}(N_\varepsilon^{n-1}(x))} \subset \sigma_\alpha^{-1}(U)$$

Alors $\overline{N_\varepsilon^n(x)}$ est un voisinage Δ-compact de x dans $X^n \cap U$.

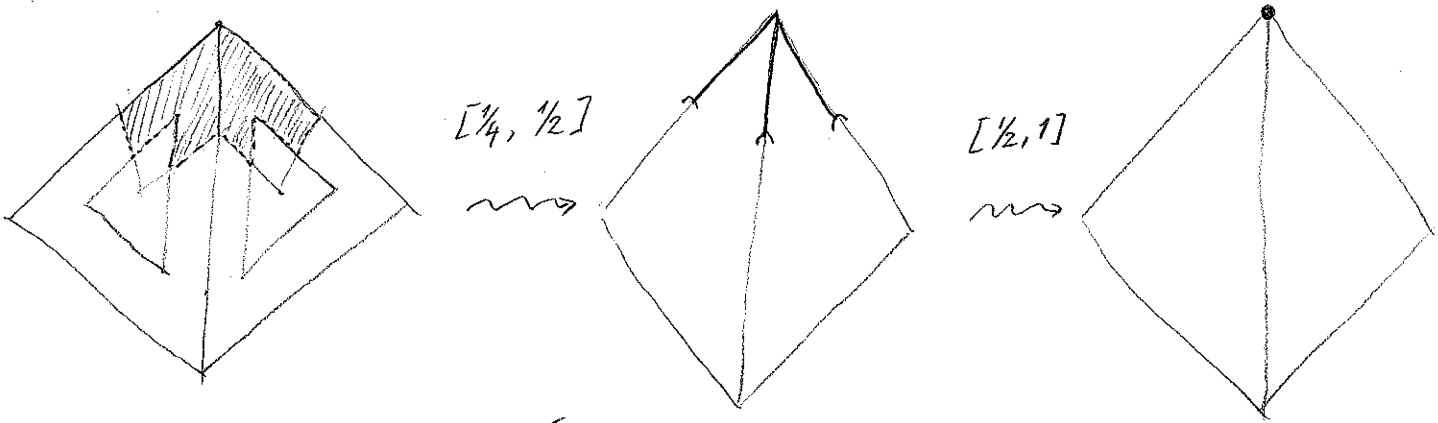
b) Comme dans a), soit σ_{α_0} l'unique simplexe tel que x appartient à $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^{n_\alpha})$ et soit n_0 sa dimension. Alors $N_\varepsilon^n(x)$ est vide pour $n < n_0$, $N_\varepsilon^{n_0}(x)$ est une boule $B_{\varepsilon(\alpha_0)}(x)$

1) I.e. voisinage dont l'intersection avec chaque simplexe fermé est compact.

et pour $n > n_0$, on a

$$\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(x)) = \mathcal{E}p_{\varepsilon(\alpha)}(\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(x)))$$

pour tout simplexe σ_α de dimension n. On construit une homotopie $F : N_\varepsilon(x) \times I \longrightarrow N_\varepsilon(x)$ entre l'identité de $N_\varepsilon(x)$ et l'application constante $N_\varepsilon(x) \longrightarrow \{x\}$ telle que pour tout simplexe σ_α de dimension $n > n_0$, F rétrécit l'épaississement $\mathcal{E}p_{\varepsilon(\alpha)}(\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(x)))$ sur $\sigma_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(x))$ pendant que t parcourt $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$



Si $n_0 = 0$, on a terminé.
Si $n_0 > 0$, alors $B_{\varepsilon(\alpha_0)}(x)$ est une boule dans $\sigma_{\alpha_0}(\mathring{\Delta}^{n_{\alpha_0}})$ et on la contracte sur x pendant que t parcourt $[1/2^{n_0}, 1]$.

Prop. 2 : Soit $A \subseteq X$ un sous-Δ-complexe. Alors pour tout $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow]0,1[$, le voisinage $N_\varepsilon(A)$ se rétracte par déformation sur A. En particulier, la paire (X,A) est bonne.

Dém. (esquisse) : Si σ_α est un simplexe qui n'appartient pas à A, alors $N_\varepsilon(A) \cap \sigma_\alpha(\Delta^{n_\alpha})$ est obtenu à partir d'un sous-complexe du bord $\sigma_\alpha(\partial\Delta^{n_\alpha})$ par épaississements successifs.

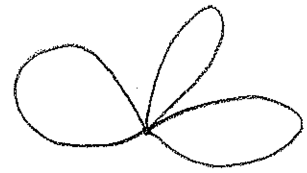
On peut alors construire une rétraction par déformation de $N_\varepsilon(A)$ sur A comme dans la démonstration du Lemme 2. ✓

2.9.3 Base pour l'homologie des bouquets de sphères

Déf: Soient $n \geq 1$ un entier et I un ensemble. Un <u>bouquet de sphères</u> indexées par I est un esp. top. homéomorphe à

$$\bigvee_I S^n = \left(\coprod_I \Delta^n\right) \Big/ \left(\coprod_I \partial\Delta^n\right).$$

Exemple : Un bouquet de trois 1-sphères:



Lemme 3 : Soit X un Δ-complexe. Alors pour tout $n \geq 1$, le quotient X^n/X^{n-1} est homéomorphe au bouquet de n-sphères

$$\left(\coprod_{n_\alpha = n} \Delta^{n_\alpha}\right) \Big/ \left(\coprod_{n_\alpha = n} \partial\Delta^{n_\alpha}\right) = \bigvee_{n_\alpha = n} S^n$$

Dém. (esquisse) : Les applications $\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$, où $n_\alpha = n$, induisent une application continue

$$\coprod_{n_\alpha = n} \Delta^n \longrightarrow X^n$$

qui induit l'homéomorphisme recherché. ✓

Soit $n \geq 1$. Soit I un ensemble et, pour tout $i \in I$, soit Δ_i^n une copie de Δ^n associée à i. Soit

$$\sigma_i : \Delta^n \longrightarrow \coprod_{i \in I} \Delta_i^n$$

l'inclusion de $\Delta_i^n = \Delta^n$.

Rques : 1) Les σ_i sont des n-cycles relatifs à $\coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n$ car $\partial \sigma_j \in C_{n-1}(\coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n)$ pour tout $j \in I$.

2) On a l'épaississement $\coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n \subset \coprod_{i \in I} \partial^{\varepsilon} \Delta_i^n$, $\varepsilon = 1/2$, qui se rétracte par déformation sur $\coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n$. Donc la paire $(\coprod_{i \in I} \Delta_i^n, \coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n)$ est bonne.

C'est aussi une conséquence de la Prop. 2.9.2.2).

Prop. 1 : Les classes des σ_i forment une base de $H_n(\coprod_{i \in I} \Delta_i^n, \coprod_{i \in I} \partial \Delta_i^n) \; (\xleftarrow{\sim} H_n(\coprod_{i \in I} \Delta_i^n / \coprod_{i \in I} \partial_i \Delta^n) = H_n(\bigvee_{i \in I} S^n))$

Les homologies en degrés $\neq n$ de $(\coprod \Delta_i^n, \coprod \partial \Delta_i^n)$ s'annulent.

Dém. : Clairement, pour toute famille de paires (X_i, A_i), $i \in I$, on a

$$C(\coprod X_i) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} C(X_i)$$

$$C(\coprod A_i) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} C(A_i)$$

$$C(\coprod X_i, \coprod A_i) \xleftarrow{\sim} (\bigoplus C(X_i)) / (\bigoplus C(A_i)) = \bigoplus C(X_i, A_i).$$

Donc il suffit de montrer que $\sigma_n = Id : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$