Soit $n \geq 1$. Soit I un ensemble et, pour tout $i \in I$, soit Δ_i^n une copie de Δ^n associée à i. Soit

$$\sigma_i : \Delta^n \longrightarrow \coprod_{i \in I} \Delta_i^n$$

l'inclusion de $\Delta_i^n = \Delta^n$.

Rques : 1) Les σ_i sont des n-cycles relatifs à $\coprod_{i\in I} \partial\Delta_i^n$ car $\partial\sigma_j \in C_{n-1}(\coprod_{i\in I} \partial\Delta_i^n)$ pour tout $j \in I$.

2) On a l'épaississement $\coprod_{i\in I} \partial\Delta_i^n \subset \coprod_{i\in I} \partial^\varepsilon\Delta_i^n$, $\varepsilon = 1/2$, qui se rétracte par déformation sur $\coprod_{i\in I} \partial\Delta_i^n$.

Donc la paire $(\coprod_{i\in I} \Delta_i^n, \coprod_{i\in I} \partial\Delta_i^n)$ est bonne.

(C'est aussi une conséquence de la Prop. 2.9.2.2).

Prop. 2 : Les classes des σ_i forment une base de $H_n(\coprod_{i\in I} \Delta_i^n, \coprod_{i\in I} \partial\Delta_i^n)$ $\left(\xleftarrow{\sim} H_n(\coprod_{i\in I} \Delta_i^n / \coprod_{i\in I} \partial_i\Delta^n) = H_n(\bigvee_{i\in I} S^n)\right)$.

Les homologies en degrés $\neq n$ de $(\coprod \Delta_i^n, \coprod \partial\Delta_i^n)$ s'annulent.

Dém. : Clairement, pour toute famille de paires (X_i, A_i), $i \in I$, on a

$$C(\coprod X_i) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} C(X_i)$$

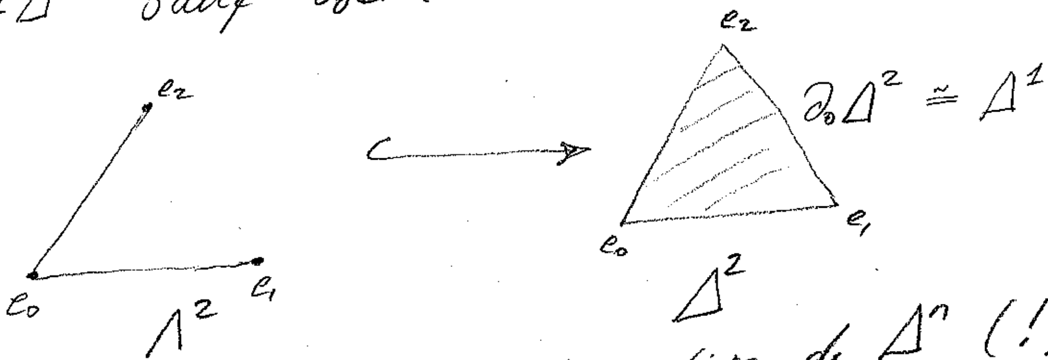
$$C(\coprod A_i) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} C(A_i)$$

$$C(\coprod X_i, \coprod A_i) \xleftarrow{\sim} (\bigoplus C(X_i)) / (\bigoplus C(A_i)) = \bigoplus C(X_i, A_i).$$

Donc il suffit de montrer que $\sigma_n = Id : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$

fournit une base de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ et que $H_m(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ s'annule pour $m \neq n$. On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$, le simplexe Δ^0 est un point et $\partial\Delta^0$ est vide. Alors $H_0(\Delta^0, \emptyset)$ est effectivement libre de base le 0-simplexe $\sigma_0 = Id : \Delta^0 \longrightarrow \Delta^0$.

Supposons $n > 0$. Soit $\Lambda^n \subset \Delta^n$ la réunion de toutes les faces $\partial_i \Delta^n$ sauf $\partial_0\Delta^n$. Par exemple :



Alors Λ^n est un rétract par déformation de Δ^n (!). Donc $(\Lambda, \Lambda) \hookrightarrow (\Delta^n, \Lambda)$ est une équivalence d'homotopie relative et $H_m(\Delta^n, \Lambda) = 0$ pour tout $m \geq 0$. Considérons la suite exacte longue associée à $\Lambda \subset \partial\Delta^n \subset \Delta^n$:

$$\to H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow \overbrace{H_n(\Delta^n, \Lambda)}^{=0} \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow \underbrace{H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda)}_{=0} \longrightarrow \cdots \qquad (0)$$

On en déduit que l'on a l'isomorphisme

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\ \sim\ } H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \qquad (1)$$

et une "chasse au lion" montre qu'il envoie la classe de $\sigma_n = Id_{\Delta^n}$ sur celle de $\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ d_i$.

L'inclusion de la face $\partial_0\Delta^n \hookrightarrow \partial\Delta^n$ donne un morphisme de (bonnes) paires

$$(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \longrightarrow (\partial\Delta^n, \Lambda)$$

p.ex.

et ce morphisme induit un homéomorphisme dans les quotients

$$\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \xrightarrow{\sim} \partial\Delta^n/\Lambda .$$

On a donc des isomorphismes (2)

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \arrow[d, "\wr"] \\
H_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}) \arrow[r, "\sim"] & H_{n-1}(\partial\Delta^n/\Lambda)
\end{tikzcd}$$

Par l'isomorphisme $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$, la classe de $\sigma_{n-1} = Id_{\Delta^{n-1}}$ est envoyée sur celle de

$$\partial_0\Delta^n = \sigma_n d_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_n d_i$$

(on a la dernière égalité car $\sigma_n d_i \in C(\Lambda)$ pour $i > 0$).

Par l'hypothèse de récurrence, la classe de σ_{n-1} est une base de $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$. Par les isom. (1) et (2), elle correspond à celle de σ_n, qui est donc une base.

L'annulation des $H_m(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, $m \neq 0$, résulte de (0).

2.9.4 Le théorème de comparaison

Déf : Soient X un Δ-complexe et $A \subset X$ un ss-complexe. Le complexe des chaînes simpliciales relatives est

$$C^\Delta(X,A) = C^\Delta(X)/C^\Delta(A).$$

L'homologie simpliciale relative est définie par

$$H_m^\Delta(X,A) = H_m(C^\Delta(X,A)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Lemme 1 : Soit X un complexe simplicial, $X^{-1} = \emptyset$ et X^n son n-squelette pour $n \geq 0$. Alors on a

$$H_m^\Delta(X^n, X^{n-1}) = 0 \quad \text{pour } m \neq n$$

et $H_n^\Delta(X^n, X^{n-1})$ est libre de base les classes des n-simplexes σ_α de X de dimension $n_\alpha = n$.

Dém. : On a

$$C^\Delta(X^n) = \Big(\cdots \to 0 \to \bigoplus_{n_\alpha = n} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \to \bigoplus_{n_\alpha = n-1} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \to \cdots \to \bigoplus_{n_\alpha = 0} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \Big)$$

$$C^\Delta(X^{n-1}) = \Big(\cdots \to 0 \to 0 \to \bigoplus_{n_\alpha = n-1} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \to \cdots \to \bigoplus_{n_\alpha = 0} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \Big)$$

$$C^\Delta(X^n, X^{n-1}) \cong \Big(\cdots \to 0 \to \bigoplus_{n_\alpha = n} \mathbb{Z}\sigma_\alpha \to 0 \to \cdots \to 0 \Big)$$

✓

Rque : Soient X un complexe simplicial et $A \subset X$ un sous-complexe. On a une inclusion naturelle $C^\Delta(X) \hookrightarrow C(X)$ qui envoie $C^\Delta(A)$ dans $C(A)$. D'où un morphisme de complexes canonique $C^\Delta(X,A) \to C(X,A)$

et donc des homomorphismes canoniques

$$H_m^\Delta(X,A) \longrightarrow H_m(X,A), \quad m \geq 0.$$

Théorème 2 : Ce sont des isomorphismes.

Exemple : Pour $(X,A) = (\Delta^n, \partial\Delta^n)$, l'application can.

$$H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$$

est un isom., car elle envoie $\sigma = Id : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$, qui fournit une base de $H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ (Lemme 1), sur la classe de σ dans $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, qui est une base d'après la Prop. 3.1.

Dém. du thm 2 : Supposons d'abord que $A = \phi$.

Etape 1 : L'application can. $H_m^\Delta(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_m(X^n, X^{n-1})$ est un isomorphisme pour tous $m, n \geq 0$.

Dém. : Pour $n = 0$, il faut montrer que

$$H_m^\Delta(X^0) \xrightarrow{\sim} H_m(X^0)$$

est un isomorphisme. Comme l'espace X^0 est discret, c'est clair. Supposons $n > 0$. La paire (X^n, X^{n-1}) est bonne. Donc l'application

$$H_m(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_m(X^n/X^{n-1})$$

est un isomorphisme pour tout $m \geq 0$. Or l'espace X^n/X^{n-1} est homéomorphe au bouquet de n-sphères $\coprod_{n_\alpha = n} \Delta^n / \coprod_{n_\alpha = n} \partial\Delta^n$ (Lemme 3.1) et son homologie a pour base les classes des simplexes $\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X^n \longrightarrow X^n/X^{n-1}$ de dimension $n_\alpha = n$ (Prop. 9.2). Ces classes sont les images par l'appl. can. d'une base de l'homologie simpliciale de $H_m^\Delta(X^n, X^{n-1})$ (Lemme 1). Donc l'application canonique est un isomorphisme.

Etape 2 : L'application canonique

$$H_m^\Delta(X^n) \longrightarrow H_m(X^n)$$

est un quasi-isomorphisme pour tous $m, n \geq 0$.

Dém. : On procède par récurrence sur n. Pour $n=0$, l'affirmation résulte de l'Etape 1. Supposons $n>0$. On a un diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{m+1}^\Delta(X^n, X^{n-1}) & \to & H_m^\Delta(X^{n-1}) & \to & H_m^\Delta(X^n) & \to & H_m^\Delta(X^n, X^{n-1}) & \to & H_{m-1}^\Delta(X^{n-1}) \\
\downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \mathrm{can} & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 \\
H_{m+1}(X^n, X^{n-1}) & \to & H_m(X^{n-1}) & \to & H_m(X^n) & \to & H_m(X^n, X^{n-1}) & \to & H_{m-1}(X^{n-1})
\end{array}$$

Ici φ_1 et φ_3 sont des isom. par l'étape 1 et φ_2 et φ_4 par l'hypothèse de récurrence. Donc, par le lemme des cinq, l'appl. can est un isomorphisme.

Etape 3 : On a $C(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(X^n)$.

Dém. : Ceci résulte du fait que tout simplexe $\sigma : \Delta^m \to X$ se factorise par un ss-complexe $X^m \hookrightarrow X$, voir le Lemme 3 ci-dessous.

Etape 4 : L'application can. $H_m^\Delta(X) \longrightarrow H_m(X)$ est un isomorphisme pour tout $m \geq 0$.

Dém. : Surjectivité : Soit c un m-cycle de X. Par l'étape 3, c est un n-cycle de X^n pour un n. Par l'étape 2, on a $c = can(c_1) + \partial(c_2)$ pour un m-cycle c_1 de $C_m^\Delta(X^n)$ et une $(m+1)$-chaîne c_2 de X^n. Mais alors la classe de c est l'image de celle de c_1 dans $H_m^\Delta(X)$.

Injectivité : Supposons que c est un m-cycle de $C_m^\Delta(X)$ et que son image par can est un bord de $C(X)$. On a $c \in C_m^\Delta(X^{n_1})$ pour un $n_1 \geq 0$. On a $c = \partial(c_1)$ et c_1 est dans $C_{m+1}(X^{n_2})$ pour un $n_2 \geq 0$, par l'étape 3. Donc si on choisit $n \geq \max(n_1, n_2)$, alors la classe de c est dans $H_m^\Delta(X^n)$ et son image dans $H_m(X^n)$ s'annule. Par l'étape 2, la classe de c dans $H_m^\Delta(X^n)$ est nulle et donc elle est nulle dans $H_m^\Delta(X)$. ✓

Lemme 3 : Toute partie compacte C d'un Δ-complexe X est contenue dans un sous-complexe fini (en particulier, on a $C \subset X^n$ pour un $n \geq 0$).

Dém. : Supposons que C contient une suite de points x_n, $n \in \mathbb{N}$, qui appartiennent à des simplexes distincts 2 à 2. Montrons que la partie S formée des x_n, $n \geq 0$, est fermée dans X. Une partie F de X est fermée ssi $\sigma_\alpha^{-1}(F)$ est fermé dans Δ^{n_α} pour tout simplexe σ_α de X ssi $F \cap X^n$ est fermé (dans X^n) pour tout $n \geq 0$. Montrons par récurrence sur n que $S \cap X^n$ est fermé dans X^n pour tout $n \geq 0$. Clairement, $S \cap X^0$ est fermé dans X^0. Supposons que $n > 0$ et que $S \cap X^{n-1}$ est fermé dans X^{n-1}. Soit σ_α un simplexe de dimension n. On a $S \cap \sigma_\alpha(\Delta^n) = (S \cap \sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)) \cup (S \cap \sigma_\alpha(\partial\Delta^n))$. Par l'hypothèse de récurrence, la partie $S \cap \sigma_\alpha(\partial\Delta^n)$ est fermée dans $\sigma_\alpha(\Delta^n)$ et par construction de S, la partie $S \cap \sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)$ est vide ou réduite à un point. Donc $S \cap \sigma_\alpha(\Delta^n)$ est fermée. et $S \cap X^n$ est fermé. Le même argument montre que S' est fermé pour toute partie S' de S. Donc $S \subset C$ est discret dans un espace compact. Mais alors S doit être fini. Contradiction. ✓