Université Paris Diderot – Paris 7 26/05/2010
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et C. Leruste

M1 de Mathématiques : Topologie algébrique M 2406

Examen final

Avertissement : Les documents sont interdits. Pour obtenir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions.

1) *Question de cours/TD :*
   a) Munir le plan projectif réel d'une structure de Δ-complexe.
   b) Déterminer l'homologie de ce Δ-complexe.
   c) Que dire de l'homologie singulière du plan projectif réel ?

2) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soient X le plan $\mathbb{R}^2$ et $A \subset X$ la partie formée des points $(1,0)$, …, $(n,0)$.
   a) Utiliser la suite exacte longue associée à la paire (X, A) pour montrer que le groupe d'homologie relative $H_1(X, A)$ est canoniquement isomorphe au noyau de l'application $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ qui envoie un n-uplet d'entiers sur leur somme.
   b) Déduire que $H_1(X, A)$ est un groupe abélien libre de rang $n-1$ et en exhiber une base.
   c) Montrer que le quotient X/A a le type d'homotopie d'un bouquet de $n-1$ cercles.
   d) Montrer que l'homologie relative $H_1(X, A)$ est canoniquement isomorphe à l'homologie 'absolue' $H_1(X/A)$.
   e) Montrer que les chemins $\gamma_k : t \mapsto k + t$, où k parcourt les entiers de 1 à $n-1$, fournissent un ensemble libre et générateur dans le groupe fondamental de X/A basé en A/A.
   f) Déduire que ces chemins fournissent une base de $H_1(X, A)$.

3) Soient X un espace topologique et X_p, $p \in \mathbb{N}$, une suite croissante de sous-espaces telle que tout compact de X est contenu dans l'un des X_p. Soit $j \geq 0$ un entier. Pour des entiers $q \geq p \geq 0$ notons $\phi_{q,p}$ l'application $H_j(X_p) \to H_j(X_q)$ induite par l'inclusion et ϕ_p l'application $H_j(X_p) \to H_j(X)$ induite par l'inclusion.
   a) Montrer que pour toute classe c dans $H_j(X)$, il existe un $p \geq 0$ et une classe c' dans $H_j(X_p)$ telle que $\phi_p(c') = c$.
   b) Montrer que si c' est une classe dans $H_j(X_p)$ telle que $\phi_p(c') = 0$, alors il existe un entier $q \geq p$ tel que $\phi_{q,p}(c') = 0$.

4) Soient n et k des entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Soit S^n la sphère de dimension n et $A \subset S^n$ un sous-espace homéomorphe à une boule de dimension k (de façon équivalente : à un hypercube I^k). On se propose de montrer que l'homologie $H_j(S^n \setminus A)$ s'annule pour $j > 0$ et est libre de rang 1 pour $j = 0$.
   a) Vérifier l'affirmation pour $n = 0$.
   b) Vérifier l'affirmation pour $k = 0$ et n quelconque.

On procède désormais par récurrence sur k.

c) Soit $\phi : I^k \to A$ un homéomorphisme et soient

$$A_+ = \phi(I^{k-1} \times [1/2, 1]) \quad \text{et} \quad A_- = \phi(I^{k-1} \times [0, 1/2]).$$

Vérifier que $B = A_+ \cap A_-$ est homéomorphe à I^{k-1}, que $S^n \setminus A$ est l'intersection des ouverts $S^n \setminus A_+$ et $S^n \setminus A_-$ et que leur réunion est égale à $S^n \setminus B$.

d) Supposons que $k > 0$ et que l'affirmation a été démontrée jusqu'au cran $k - 1$. Supposons que l'homologie réduite $\widetilde{H}_j(S^n \setminus A)$ contient une classe non nulle c. Montrer qu'au moins l'une des applications canoniques

$$\widetilde{H}_j(S^n \setminus A) \to \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_+) \quad \text{et} \quad \widetilde{H}_j(S^n \setminus A) \to \widetilde{H}_j(S^n \setminus A_-)$$

envoie c sur une classe non nulle. Indication : utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris en homologie réduite et l'hypothèse de récurrence.

e) Gardons les hypothèses du point précédent. Construire une suite décroissante de sous-espaces emboîtés $A = A_0 \supset A_1 \supset \cdots A_p \cdots$ tels que l'intersection C des A_p est homéomorphe à I^{k-1} et que l'image de la classe c dans $\widetilde{H}_j(S^n \setminus A_p)$ est non nulle pour tout $p \geq 0$.

f) Utiliser l'exercice 2 b) pour déduire que la classe c doit s'annuler, en contradiction avec l'hypothèse. Conclure que le groupe $\widetilde{H}_j(S^n \setminus A)$ s'annule pour tout entier $j \geq 0$.