Université Paris Diderot – Paris 7 24/05/2011
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et C. Leruste

M1 de Mathématiques : Topologie algébrique M 2406

Examen final

Avertissement : Les documents sont interdits. Pour obtenir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions.

1) *Question de cours/TD :*
   a) Munir la bouteille de Klein d'une structure de Δ-complexe.
   b) Déterminer l'homologie de ce Δ-complexe.
   c) Que dire de l'homologie singulière de la bouteille de Klein ?

2) Soit une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

   Supposons que f est une surjection sur un facteur direct de rang 2 et g une surjection sur un facteur direct de rang 1.
   a) Montrer que A et C sont isomorphes à $\mathbb{Z}$.
   b) Montrer que B est isomorphe à $\mathbb{Z}^4$.

3) On se propose de calculer l'homologie de l'espace appelé 'surface compacte orientable de genre 2'. Soit X l'espace topologique obtenu à partir du disque unité fermé de $\mathbb{C}$ en enlevant les disques ouverts de rayon $1/4$ et de centres $1/2$ et $-1/2$ (voir la figure 1).
   a) Montrer que X est un rétract par déformation de $\mathbb{C} \setminus \{1/2, -1/2\}$.
   b) Quel est le groupe fondamental $\pi_1(X, 0)$?
   c) Montrer que les groupes d'homologie $H_p(X)$, $p \geq 0$, sont libres et en exhiber des bases[1].
   d) Soit $Y \subset X$ le sous-espace fermé formé des trois colliers hachurés (figure 2). Montrer que les groupes d'homologie de Y sont libres et en exhiber des bases.
   e) Calculer, dans les bases obtenues précédemment, la matrice de l'application α_p : $H_p(Y) \to H_p(X)$, $p \geq 0$, induite par l'inclusion $Y \subset X$.
   f) Montrer à l'aide d'une suite de dessins que l'espace X est homéomorphe à l'espace X' de la figure 3.
   g) Soit X'' une autre copie de X' et soit Z l'espace obtenu en recollant X' et X'' le long de leurs sous-espaces Y' et Y'' (homéomorphes à Y) comme dans la figure 4. Justifier l'existence d'une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow H_1(Y) \xrightarrow{f} H_1(X') \oplus H_1(X'') \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_0(Y) \xrightarrow{g} H_0(X') \oplus H_0(X'') \longrightarrow H_0(Z) \longrightarrow 0$$

   h) Déterminer les groupes $H_p(Z)$, $p \geq 0$. Indication : on pourra se servir de l'exercice 2.

---
[1] Nous considérons le module nul comme libre sur la base vide.

4) Soient X et Y des espaces topologiques et f et g des applications continues $X \to Y$. Soit I l'intervalle $[0,1]$ et ∂I l'ensemble $\{0,1\}$. Soit Z le quotient de la réunion disjointe $(X \times I) \coprod Y$ par la relation qui identifie les points $(x,0)$ avec $f(x)$ et les points $(x,1)$ avec $g(x)$. Nous admettrons que l'on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{f_*-g_*} H_n(Y) \longrightarrow H_n(Z) \longrightarrow H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_*-g_*} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots \tag{1}$$

a) Supposons que $X = Y = S^1$, que f est l'identité et que g est l'application $z \mapsto \overline{z}$. Montrer que Z est homéomorphe à la bouteille de Klein.

b) Sous les hypothèses du point précédent, et en supposant l'existence de la suite (1), montrer qu'on a une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z},$$

où Z est la bouteille de Klein. Déduire que $H_2(Z)$ s'annule et que $H_1(Z)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$.