TD 11

Exo 3.9. Que peut-on dire d'un événement qui est indép. de lui même.

Solution : A, B

Brouillon: $\left| \begin{array}{l} \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \end{array} \right. \qquad \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \;\Big|$

Rappel: A et B indép ssi: $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.

Donc si A est indép de A alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap A) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2 .$$

Donc la proba de A est un nbre réel x qui satisfait l'équation $x^2 = x$

Donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$ $\square$

À 9h20: l'exo 3.10.

Exo 3.10 : Une urne contient :

* k boules rouges
* n boules vertes

$(n, k \geq 1)$. On tire une première boule et après, sans remettre la première boule, on tire une deuxième

$A_1 =$ "la première boule est rouge"

$A_2 =$ "la deuxième boule est rouge"

Prouver que A_1 et A_2 ne sont pas indép.

Preuve : On veut montrer que: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2)$.

l'espace proba: $B =$ "ensemble de boules" $= \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+n\}$

$\Omega = \{(b_1, b_2) \in B^2 ;\ b_1 \neq b_2\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} =$ la probabilité uniforme.

$\mathbb{P}(A_1) = |A_1| / |\Omega|$ où $A_1 = \{(b_1, b_2) \in \Omega ;\ 1 \leq b_1 \leq k\}$

On a: $|\Omega| = \underbrace{(k+n)}_{\#\text{ possibilités pour } b_1} \cdot \underbrace{(k+n-1)}_{\#\text{ possibilités pour } b_2 \text{ par choix pour } b_1}$

et : $|A_1| = \underbrace{k}_{\#\text{poss. } b_1} \cdot \underbrace{(n+k-1)}_{\substack{\#\text{ poss. pour } b_2 \\ \text{par choix pour } b_1}}$

Donc : $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{k \cdot (n+k-1)}{(n+k)\cdot(n+k-1)} = \dfrac{k}{n+k}$.

$\mathbb{P}(A_2)$: $A_2 = \{(b_1, b_2) \in \Omega ; \ 1 \leq b_2 \leq k\}$

$|A_2| = \underbrace{k}_{\#\text{poss. } b_2} \cdot \underbrace{(n+k-1)}_{\substack{\#\text{ poss. } b_1 \\ \text{par choix pour } b_2}}$

Donc : $\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{|A_2|}{|\Omega|} = \dfrac{k(n+k-1)}{(n+k)\cdot(n+k-1)} = \dfrac{k}{n+k}$.

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$: $A_1 \cap A_2 = \left\{(b_1, b_2) \in \Omega ; \ \begin{matrix} 1 \leq b_1 \leq k \\ 1 \leq b_2 \leq k \end{matrix}\right\}$.

Donc : $|A_1 \cap A_2| = \underbrace{k}_{\#\text{poss } b_1} \cdot \underbrace{(k-1)}_{\substack{\#\text{ poss. } b_2 \\ \text{par choix pour } b_1}}$

Donc : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \dfrac{k \cdot (k-1)}{(n+k)(n+k-1)}$

De l'autre côté : $\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = \dfrac{k}{n+k} \dfrac{k}{n+k}$

Vu que pour $n, k \geq 1$

$$\frac{k-1}{n+k-1} \neq \frac{k}{n+k}$$

On a que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$

donc A_1 et A_2 ne sont pas indép. □

9h55 : Exo 3.3.

Exo 3.3 : On a 3 cartes dans un sac

* une carte avec deux faces rouges
* une carte avec une face rouge et une face noire
* une carte avec deux faces noires

On tire une carte avec les yeux fermés et la met sur la table. Si la face qu'on voit est rouge quelle est la proba. que l'autre face est rouge aussi ?

Solution : R = "la face qu'on voit est rouge"

A_1 = "la carte tirée a deux faces rouges"

A_2 = "la carte tirée a une face rouge et une face noire"

A_3 = "la carte tirée a deux faces noires".

$\mathbb{P}(A_1 | R)$? Obs : $\mathbb{P}(R|A_1) = 1$

Rappel : Bayes si A et B sont des événements, $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Preuve : $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} \quad \square$$

Donc : $$\mathbb{P}(A_1|R) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(R|A_1)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(R)}.$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}$$

De plus : $$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}((R\cap A_1)\cup(R\cap A_2)\cup(R\cap A_3)) \\ &= \mathbb{P}(R\cap A_1) + \mathbb{P}(R\cap A_2) + \mathbb{P}(R\cap A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(R|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(R|A_2) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_3)\cdot\mathbb{P}(R|A_3) \\ &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $$\mathbb{P}(A_1|R) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}. \quad \square$$

<u>La prochaine fois</u> : l'exo 3.12.