TD 11

Exo 4.9 X, Y deux v.a. indép. $X \sim \text{Géom}(p)$, $Y \sim \text{Géom}(q)$
$p, q \in]0,1[$.

$$Z = \min\{X, Y\}.$$

a) Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$ $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Rappel: * $X \sim \text{Géom}(p) \iff \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$
pour $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$

* Si $X \sim \text{Géom}(p)$ alors $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
(Exo 4.4)

On a:

$$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(\min\{X, Y\} > n) = \mathbb{P}(X > n \text{ et } Y > n)$$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X > n) \cdot \mathbb{P}(Y > n)$$

$$\overset{\text{Exo 4.4}}{=} (1-p)^n \cdot (1-q)^n.$$

b) Prouver que Z est géométrique et déterminer le paramètre.

$n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(Z = n) \overset{*}{=} \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n)$$

$$\overset{(a)}{=} ((1-p)(1-q))^{n-1} - ((1-p)(1-q))^n$$

$$= ((1-p)(1-q))^{n-1} \cdot (1 - (1-p)(1-q))$$

$$= (1 - p - q + pq)^{n-1} (p + q - pq)$$

$$= (1 - (p+q-pq))^{n-1} (p+q-pq)$$

* On a

$$\mathbb{P}(Z > n-1) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k)$$

$$\mathbb{P}(Z > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k) \quad -$$

$$\mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(Z = n)$$

Obs:

$$p + q - pq = \underbrace{1 - \underbrace{\underbrace{(1-p)}_{\in]0,1[} \underbrace{(1-q)}_{\in]0,1[}}_{\in]0,1[}}_{\in]0,1[}$$

Donc: $Z \sim \text{Géom}(p+q-pq)$

Solution alternative: X : premier succès dans une suite d'expériences indép avec proba de succès p

Y : " " q

On définit une nouvelle suite d'expériences :
chaque fois on fait une exp. correspondant à X
et une corresp. à Y au même temps.

Z : la première fois que l'expérience corresp. à X ou
l'expérience corresp. à Y (ou les deux) est un succès.

Et on a
$$\mathbb{P}(\text{succès}_Z) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{l'exp. pour } X \\ \text{ou } Y \text{ est un succès}\end{array}\right)$$
$$= \mathbb{P}(\text{succès}_X) + \mathbb{P}(\text{succès}_Y) - \mathbb{P}(\text{succès}_X \cap \text{succès}_Y)$$
$$\overset{\text{indép.}}{=} p + q - pq$$
Donc $Z \sim \text{Géom}(p+q-pq)$.

À 9^h30 : l'exo 4.10.

Exo 4.10 : X_1, X_2 deux v.a. indép. à valeurs dans $\{-1, 1\}$
t.q. $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2$.

a) Prouver : * $X_1 X_2$ indép de X_1
* $X_1 X_2$ indép de X_2.

Solution : On veut prouver que
$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = x \text{ et } X_1 = y) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = x) \cdot \mathbb{P}(X_1 = y)$$
$$\forall\, x, y \in \{-1, 1\}.$$

On va calculer :

x	y	$\mathbb{P}(X_1 X_2 = x \text{ et } X_1 = y)$
-1	-1	$1/4$
-1	1	$1/4$
1	-1	$1/4$
1	1	$1/4$

Exemple :
$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = -1 \text{ et } X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \text{ et } X_1 = -1)$$
$$\overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{4}$$

De plus :
$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1 \text{ et } X_1 = -1) + \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1 \text{ et } X_1 = 1)$$
$$\overset{\text{tabelle}}{=} \frac{1}{2}.$$
$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = -1) = \frac{1}{2}$$
Donc $\mathbb{P}(X_1 X_2 = x) \cdot \mathbb{P}(X_1 = y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \forall\, x, y \in \{-1, 1\}$

Donc $X_1 X_2$ et X_1 indép. Même calcul : $X_1 X_2$ et X_2 indép. $\square$

b) X_1X_2 et (X_1, X_2) indép. ?

Solution : Non, par exemple:

$$\mathbb{P}(X_1X_2 = 1 \text{ et } (X_1, X_2) = (-1,1)) = 0$$

Mais : $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1) \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}$

et $\mathbb{P}((X_1, X_2) = (-1,1)) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X_1 = -1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}((X_1, X_2) = (-1,1)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$$\neq 0.$$

$\square$

Obs: Si $X_1 : \Omega \to \{-1,1\}$ et $X_2 : \Omega \to \{-1,1\}$ sont des v.a. alors : $(X_1, X_2) : \Omega \longrightarrow \{-1,1\} \times \{-1,1\}$ déf. par $(X_1, X_2)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$ est une v.a.

À 10^h10 : l'exo 4.11.

Exo 4.11 : On lance de manière répétée un dé à 6 faces.

X_k : résultat du k-ème lancer

T : la première fois que le résultat $\in \{1,2,3,4\}$

$Y = X_T$.

a) Exprimer l'événement $\{T = n\}$ en termes de $X_1, \dots, X_n$ et calculer sa proba.

Solution : $\{T = n\} = \{X_1 \in \{5,6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5,6\}, X_n \in \{1,2,3,4\}\}$

Donc $\mathbb{P}[T = n] = \mathbb{P}(X_1 \in \{5,6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5,6\}, X_n \in \{1,2,3,4\})$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \in \{5,6\})}_{1/3} \cdots \underbrace{\mathbb{P}(X_{n-1} \in \{5,6\})}_{1/3} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_n \in \{1,2,3,4\})}_{2/3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3}$$

Donc $T \sim \text{Géom}(2/3)$

b) Exprimer $\{T=n, \ Y=i\}$ pour $i \in \{1,2,3,4\}$
en termes de $X_1, \dots, X_n$
et calculer sa proba.

Solution: $\{T=n, Y=i\} = \{ X_1 \in \{5,6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5,6\}, X_n = i \}$.

$$\mathbb{P}(T=n, Y=i) = \mathbb{P}(X_1 \in \{5,6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5,6\}, X_n = i)$$

$$\overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_1 \in \{5,6\}) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} \in \{5,6\}) \cdot \mathbb{P}(X_n = i)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

c) La loi de Y. Sont T et Y indépendantes?

Solution: $i \in \{1,2,3,4\}$
$$\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n, Y=i)$$

$$\overset{(b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$\overset{\text{série géom.}}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2/3} = \frac{1}{4}.$$

Donc Y est uniforme sur $\{1,2,3,4\}$.

Pour l'indépendance de T et Y il faut vérifier que

$$\mathbb{P}(T=n, Y=i) = \mathbb{P}(T=n) \cdot \mathbb{P}(Y=i) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall i \in \{1,2,3,4\}.$$

On a: $\mathbb{P}(T=n, Y=i) \overset{(b)}{=} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \qquad \forall n, i$

et: $\mathbb{P}(T=n) \cdot \mathbb{P}(Y=i) \overset{(a),(c)}{=} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \ \forall n, i$

Donc $\mathbb{P}(T=n, Y=i) = \mathbb{P}(T=n) \cdot \mathbb{P}(Y=i) \ \forall n, i$

donc T et Y sont indép.