TD 11

Rappel : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ var. aléa.

Densité discrète : $P_X(k) = \mathbb{P}(X=k)$, $k \in \mathbb{N}$

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) \cdot k$

Variance : $Var(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0.$

Formule de transfert : $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

alors $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) \cdot g(k)$

Exemple : $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donné par $g(k) = k^2$

Donc par la Formule de transfert on a :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) \cdot k^2$$

Indication : (a) $\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(2n+1)\cdot(n+1)}{6}$

Preuve : (a) Sommes téléscopiques :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2 = \underbrace{1^2 - 0^2}_{1^{\text{er}} \text{ terme}} + \underbrace{2^2 - 1^2}_{2^{\text{ème}}} + \underbrace{3^2 - 2^2}_{3^{\text{ème}}} + \dots + \underbrace{n^2 - (n-1)^2}_{n^{\text{ième}}}$$

$$= n^2$$

De l'autre côté :

$$k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1$$

Donc : $n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = -n + 2\sum_{k=1}^{n} k$

donc : $2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$, donc : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ $\square$

(b) $n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\overset{(a)}{=} 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\frac{(n+1)\cdot n}{2} + n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3\frac{(n+1)n}{2} - n = \frac{n(2n^2+3n+3-2)}{2} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{2}$$

Donc : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ $\square$

À n°30 : l'exo 5.1 (a)

Exo 5.1

(a) $X \sim \text{Uniforme}(\{1, \dots, n\})$

Solution. On a $P_X(k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, \dots, n$

Donc : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} P_X(k) \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{indication}}{=} \frac{1}{n} \frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{n+1}{2}$.

De plus : $\mathbb{E}(X^2) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=1}^{n} P_X(k) \cdot k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{\text{indication}}{=} \frac{1}{n} \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(2n+1)(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(2n+1)(n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{(n+1)(\overbrace{4n+2-3n-3}^{n-1})}{12}$$

$$= \frac{n^2-1}{12}.$$

(b) $X \sim \text{Bern}(p)$, $p \in]0,1[$ | à 11h50.

Solution : $X : \Omega \to \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

Donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) \cdot k = (1-p)\cdot 0 + p \cdot 1 = p$

$\mathbb{E}(X^2) = (1-p)\cdot 0^2 + p \cdot 1^2 = p$

Donc $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

(c) $X \sim \text{Bin}(n,p)$ | à 12h13

Indication :

Méthode 1 : Utiliser la formule pour la densité discrète.

Rappel : Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \cdot k = x \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) \overset{\text{Newton}}{=} x \frac{\partial}{\partial x}\left((x+y)^n\right)$$

$$= n \cdot x \, (x+y)^{n-1}$$

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \cdot k^2 = x \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} k\right) = x \frac{\partial}{\partial x}\left(n \cdot x \, (x+y)^{n-1}\right)$$

$$= x \cdot n \cdot (x+y)^{n-1} + n(n-1) \cdot x^2 \, (x+y)^{n-2}$$

Méthode 2 : si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. indéps. et $X_i \sim \text{Bern}(p)$ $\forall i = 1, \dots, n$

alors $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Bin}(n,p)$

Rappel : Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. indéps. alors

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Solution : $X : \Omega \to \{0, \dots, n\}$

$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$

Méthode 1 :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot k \overset{\substack{\text{Indication} \\ \text{avec : } x=p \; y=1-p}}{=} n\, p \, (p + 1 - p)^{n-1} = n \cdot p$$

$$\mathbb{E}(X^2) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot k^2 \overset{\text{Indication}}{=} n \cdot p + n(n-1) p^2$$

Donc :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2$$

$$= np - np^2 = n \cdot p(1-p)$$

Méthode 2 :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \overset{(b)}{=} n \cdot p$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{indép}}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) \overset{(b)}{=} \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = n \cdot p \cdot (1-p).$$

(d) $X \sim \text{Géom}(p)$, $p \in]0,1[$.

Indication : si $x \in]-1,1[$ alors $\frac{x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \cdot k = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = x \, \frac{1\cdot(1-x) - (-1)\cdot x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \cdot k^2 = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k k\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = x \, \frac{1\cdot(1-x)^2 - 2(1-x)\cdot(-1)\cdot x}{(1-x)^4}$$

$$= x \, \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

| La prochaine fois |