TD 11

(d) $X \sim \text{Géom}(p)$, $p \in]0,1[$, $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

Solution: Indication:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \cdot k = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = x \frac{1\cdot(1-x) - (-1)\cdot x}{(1-x)^2} = x \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$x \in]-1,1[$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \cdot k^2 = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \cdot k\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = x \frac{1\cdot(1-x)^2 - (-2(1-x))\cdot x}{(1-x)^4}$$

$$= x \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

On a:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) \cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p \cdot k = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \cdot k \overset{\text{Indic.}}{=} \frac{p}{1-p} \frac{1-p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) \cdot k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p \cdot k^2 = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \cdot k^2 \overset{\text{Indic.}}{=} \frac{1-p+(1-p)^2}{(1-(1-p))^3} \frac{p}{1-p}$$

$$= p \frac{1+1-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

À 9h20 : l'exo 5.1(e)

(e) $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ $\lambda > 0$ $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Solution:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) \cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot k$$

Obs: * 0ème terme est 0

* $\frac{k}{k!} = \frac{k}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{1}{(k-1)!}$ $k \geq 1$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \overset{k'=k-1}{=} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'+1} e^{-\lambda}}{k'!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathbb{E}(X^2) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) \cdot k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} (k(k-1) + k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} k(k-1) + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} k}_{\lambda}$$

Obs: * $k(k-1) = 0$ si $k = 0, 1$

* $\frac{k(k-1)}{k!} = \frac{1}{(k-2)!}$ si $k \geq 2$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!} + \lambda$$

$$\overset{k'=k-2}{=} e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} + \lambda$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

À 10h00 : l'exo 5.3

Exo 5.3: On lance deux dés réguliers
X_1 : résultat du premier dé
X_2 : résultat du deuxième dé
Donc: $p_{X_i}(k) = \frac{1}{6}$, $i=1,2$, $k=1,2,3,4,5,6$

On définit : $Y = X_1 + X_2$, $Z = X_1 - X_2$

a) Prouver que Y et Z ne sont pas indépendantes

Solution: Rappel: Y, Z sont indép. ssi

$$\mathbb{P}(Y \in A \text{ et } Z \in B) = \mathbb{P}(Y \in A)\,\mathbb{P}(Z \in B)$$

Pour tout $A \subseteq \{2, \dots, 12\}$

$B \subseteq \{-5, \dots, 5\}$

équivalent:

$$\mathbb{P}(Y = k \text{ et } Z = \ell) = \mathbb{P}(Y = k) \cdot \mathbb{P}(Z = \ell)$$

Pour tout $k \in \{2, \dots, 12\}$
$\ell \in \{-5, \dots, 5\}$

Pas indép parce que par ex.

$$\mathbb{P}(Y = 12 \text{ et } Z = 5) = 0$$

Mais: $\mathbb{P}(Y = 12) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 6) = \frac{1}{36}$

et $\mathbb{P}(Z = 5) = \mathbb{P}(X_1 - X_2 = 5) = \mathbb{P}(X_1 = 6 \text{ et } X_2 = 1) = \frac{1}{36}$

Donc $\mathbb{P}(Y = 12) \cdot \mathbb{P}(Z = 5) \neq 0$

b) Calculer $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

Rappel: * $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

* Cov symétrique et bilinéaire

Solution:

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = \mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) \overset{\text{bilinéaire}}{=} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \mathrm{Cov}(X_2, X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2) - \mathrm{Cov}(X_2, X_2)$$

(*) $p_{X_1} = p_{X_2} \Rightarrow \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathrm{Cov}(X_2, X_2)$
Symétrie $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(X_2, X_1)$

$$\overset{(*)}{=} 0$$

(c) la densité discrète de $|Z|$ et $\mathbb{E}(|Z|)$

<u>Solution</u>:

k	$\{(i,j)\in\{1,\dots,6\}^2;\ \lvert i-j\rvert = k\}$	$p_{\lvert Z\rvert}(k)$
0	$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$	$6/36 = 1/6$
1	$\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$	$10/36 = 5/18$
2	$\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)\}$	$8/36 = 2/9$
3	$\{(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\}$	$6/36 = 1/6$
4	$\{(1,5),(5,1),(2,6),(6,2)\}$	$4/36 = 1/9$
5	$\{(1,6),(6,1)\}$	$2/36 = 1/18$

et: $$\mathbb{E}(|Z|) = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{5}{18} + 2\cdot\frac{4}{18} + 3\cdot\frac{3}{18} + 4\cdot\frac{2}{18} + 5\cdot\frac{1}{18} = \frac{35}{18}.$$

<u>Exo 5.6</u>: la prochaine fois.