TD 11

Exo 5.9 c) $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}(X_n)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}(X_n)}$

Solution: Rappel : Bienaymé – Tchebychev : X v.a.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Donc : $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}(X_n)) \overset{BT}{\leq} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)^2} \overset{(b)}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)}$

□

d) On admet $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\right) = 1$$

Solution : $1 \geq \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\right) = \mathbb{P}((1-\varepsilon)\cdot\mathbb{E}(X_n) < X_n < (1+\varepsilon)\cdot\mathbb{E}(X_n))$

$$= \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \varepsilon \cdot \mathbb{E}(X_n))$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}(X_n))$$

$$\geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^3 \mathbb{E}(X_n)} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$$

Gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\right) = 1.$

(e) pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(n+2) - \ln(2) \leq \mathbb{E}(X_n) \leq \ln(n+1)$

Solution : Rappel. $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x+1}\, dx$ parce que si $x \in [k, k+1]$, alors $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{k+1}$

Donc : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x+1}\, dx$

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x+1}\, dx = \left[\ln(x+1)\right]_{x=1}^{x=n+1} = \ln(n+2) - \ln(2).$$

$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x+1}$ si $x \in [k-1, k]$

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x+1}\, dx = \int_0^n \frac{1}{x+1}\, dx = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

□

À 9^h35 : l'exo 5.10

Exo 5.10 $2n$ personnes : n hommes, n femmes sont réparties dans deux groupes de n personnes.

a) Combien de manières.

Solution : $\binom{2n}{n}$.

b) X = # femmes dans le premier groupe. La densité discrète de X.

Solution : B_k = "il y a k femmes dans le premier groupe".

$$|B_k| = \binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}$$

Donc $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(B_k) = \frac{\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$ $k=0,\dots,n$

c) $\mathbb{E}(X)$

Solution : $X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ A_i : "$i^{\text{ème}}$ femme est dans le premier groupe"

Donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

$$|A_i| = \binom{2n-1}{n-1}$$

Donc $\mathbb{P}(A_i) = \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\,2n} = \frac{1}{2}$.

Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$.

d) $i \neq j \Rightarrow \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) \le 0$ en déduire $\mathrm{Var}(X) \le \frac{n}{4}$.

Solution : $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i})\cdot\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_j})$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i\cap A_j}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i})\cdot\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_j})$$

$$= \mathbb{P}(A_i\cap A_j) - \mathbb{P}(A_i)\cdot\mathbb{P}(A_j)$$

$$|A_i\cap A_j| = \binom{2n-2}{n-2}$$

Donc : $\mathbb{P}(A_i\cap A_j) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-2)!}}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = \frac{1}{\frac{1}{n(n-1)}\,2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$

$2n-1 \geq 2n-2 = 2(n-1) \Rightarrow \frac{n-1}{2n-1} \le \frac{1}{2}$ Donc : $\mathbb{P}(A_i\cap A_j) \le \frac{1}{4}$.

Donc $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) \le \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \le 0$.

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\mathbb{1}_{A_i}) - \underbrace{\sum_{i \neq j = 1}^{n} \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j})}_{\leq 0}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\mathbb{1}_{A_i}) \overset{(5.1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} = \frac{n}{4}.$$

e) $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n}{2}\right| \geq \varepsilon \cdot n\right) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$

$\uparrow$ (b) $\mathbb{E}(X)$

Solution:

B–T: $\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n}{2}\right| \geq \varepsilon n\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{n}{4\varepsilon^2 n^2} = \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$