TD 11

Rappel : $X : \Omega \to \mathbb{N}$ variable aléatoire, alors sa fonction génératrice

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X), \text{ toujours déf pour } s \in [-1,1].$$

Exo 6.1 :

(a) $X \sim \mathrm{Bern}(p)$, $p \in]0,1[$.

Solution :

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) \overset{\text{Formule de transfert}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot s^k$$

$$= (1-p)\cdot s^0 + p \cdot s^1 = 1-p+p\cdot s.$$

déf pour tout $s \in \mathbb{R}$.

b) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

Solution 1 : $X : \Omega \to \{0,1,\dots,n\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\cdot s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p\cdot s)^k (1-p)^{n-k}$$

$$\overset{\text{Newton}}{=} (1-p+ps)^n$$

[Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$]

Solution 2 : Si $X_1, \dots, X_n$ v.a indép t.q. $X_i \sim \mathrm{Bern}(p)$ $\forall i = 1,\dots,n$

alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

Donc

$$G_X(s) = G_{X_1+\dots+X_n}(s) \overset{\text{indép}}{=} G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s) \overset{(a)}{=} (1-p+ps)^n$$

Rappel : si X, Y v.a. indép. alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s)\cdot G_Y(s)$

+ le calcul ci-dessus et le fait que la fonc. génératrice détermine la loi prouve que $X_1 + \dots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

À 11h50 : l'exo 6.1 (c) et (d).

(c) $X \sim \text{Géom}(p)$, $p \in]0,1[$

Solution : $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

$$G_X(s) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot s^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p \cdot s^k = p \cdot s \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p) \cdot s)^{k-1}$$

$$\overset{m=k-1}{=} p \cdot s \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} ((1-p) \cdot s)^m}_{\text{converge ssi } |(1-p) \cdot s| < 1} = p \cdot s \, \frac{1}{1-(1-p) \cdot s} = \frac{ps}{1-(1-p) \cdot s}$$

donc $G_X(s) = \dfrac{ps}{1-(1-p)s}$ ssi $s \in \left] -\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p} \right[$

d) $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Solution : $$G_X(s) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} s^k$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot s)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

La prochaine fois : l'exo 6.5.