# TD 11

**Exo 6.?** $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a. indép. de même loi à valeurs $\in \mathbb{N}$

$Y$ v.a. à valeurs $\in \mathbb{N}$, $Y$ indép de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$

$$W = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

La dernière fois
$$\begin{cases} a) & G_{X_1+\ldots+X_n}(s) := \mathbb{E}\left(s^{X_1+\ldots+X_n}\right) = \left(G_{X_1}(s)\right)^n \\ b) & \mathbb{E}\left(s^W \cdot \mathbb{1}_{\{Y=n\}}\right) = \left(G_{X_1}(s)\right)^n \cdot \mathbb{P}(Y=n) \end{cases}$$

$s \geq 0$ : $G_W(s) = G_Y(G_{X_1}(s))$

c) $\mathbb{E}(W)$ en termes de $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X_1)$ ?

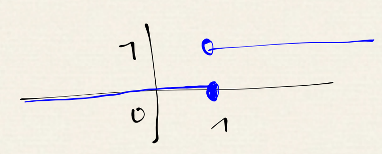
Solution : (cours) : $\mathbb{E}(W) = \lim_{s\to 1^-} G'_W(s)$

Rappel: On écrit $\lim_{x\to b^-} f(x) = a$

ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. si $x \in ]b-\delta, b[$ alors $|f(x) - a| < \varepsilon$

différence avec $\lim_{x\to b} f(x)$

Exemple :



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

on a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ mais $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

Donc : $\mathbb{E}(W) = \lim_{s\to 1^-} \left(G_Y(G_{X_1}(s))\right)' = \lim_{s\to 1^-} G'_Y(G_{X_1}(s)) \cdot \underbrace{G'_{X_1}(s)}_{\to \mathbb{E}(X_1)}$

Obs $\lim_{s\to 1^-} G_{X_1}(s) = 1 = G_{X_1}(1)$

Donc $\lim_{s\to 1^-} G'_Y(G_{X_1}(s)) = \lim_{t\to 1^-} G'_Y(t) = \mathbb{E}(Y)$

Donc $\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(Y) \cdot \mathbb{E}(X_1)$.

d) $\mathbb{E}(W\cdot(W-1))$ et $\mathrm{Var}(W)$

Solution : (cours) : $\mathbb{E}(W\cdot(W-1)) = \lim_{s\to 1^-} G''_W(s) = \lim_{s\to 1^-} \left(G'_Y(G_{X_1}(s)) \cdot G'_{X_1}(s)\right)'$

$$= \lim_{s\to 1^-} \underbrace{G''_Y(\underbrace{G_{X_1}(s)}_{\to 1})}_{\to \mathbb{E}(Y(Y-1))} \cdot \underbrace{\left(G'_{X_1}(s)\right)^2}_{\mathbb{E}(X_1)^2} + \underbrace{G'_Y(G_{X_1}(s))}_{\to \mathbb{E}(Y)} \cdot \underbrace{G''_{X_1}(s)}_{\to \mathbb{E}(X_1(X_1-1))}$$

$\mathbb{E}(W(W-1)) = \mathbb{E}(W^2 - W)$
lin. $= \mathbb{E}(W^2) - \mathbb{E}(W)$

$$= \mathbb{E}(Y(Y-1)) \cdot \mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(X_1(X_1-1))$$
$$= \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(X_1)^2 - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X_1)$$
$$= \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(X_1)^2 - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(Y)\cdot\mathrm{Var}(X_1)$$

$$\mathrm{Var}(W) = \mathbb{E}(W^2) - \mathbb{E}(W)^2 = \mathbb{E}(W(W-1)) + \mathbb{E}(W) - \mathbb{E}(W)^2$$
$$= \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(Y)\mathrm{Var}(X_1) - \mathbb{E}(Y)^2\mathbb{E}(X_1)^2 = \mathbb{E}(Y)\,\mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2\,\mathrm{Var}(Y).$$

Rappel: $\{X_1, X_2, \ldots\}$ collection de v.a. à valeurs $\in \mathbb{N}$. Alors elles sont indép. ssi $\forall J \subset \mathbb{N}$ fini et $\forall A_j \subset \mathbb{N}$ $(= X_j(\Omega))$ on a
$$\mathbb{P}(X_j \in A_j \ \forall j \in J) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(X_j \in A_j)$$

Ex. : Donc $X_1, X_2, X_3 : \Omega \to \mathbb{N}$ sont indép ssi :

$\mathbb{P}(X_1 \in A_1 \text{ et } X_2 \in A_2) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbb{P}(X_2 \in A_2)$

$\mathbb{P}(X_1 \in A_1 \text{ et } X_3 \in A_3) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbb{P}(X_3 \in A_3)$

$\mathbb{P}(X_2 \in A_2 \text{ et } X_3 \in A_3) = \mathbb{P}(X_2 \in A_2)\,\mathbb{P}(X_3 \in A_3)$

$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, X_3 \in A_3) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbb{P}(X_2 \in A_2)\,\mathbb{P}(X_3 \in A_3)$

$\forall A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{N}$.

e) $X_i \sim \mathrm{Bern}(p)$, $p \in ]0,1[$

i) $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$

ii) $Y \sim \text{Géom}_0(q)$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y=k) = (1-q)^k \, q \\ G_Y(s) = \mathbb{E}(s^Y) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k)\cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^k \cdot q \cdot s^k \\ \qquad = q \sum_{k=0}^{\infty} ((1-q)\cdot s)^k = q \dfrac{1}{1-(1-q)\cdot s} \\ \qquad \text{si } |s| < \dfrac{1}{1-q}. \end{cases}$$

<u>Solution</u> : $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$

$$G_W(s) = G_Y(G_{X_1}(s)) \qquad G_{X_1}(s) = 1-p+ps$$

$$G_W(s) = e^{\lambda(1-p+ps-1)} \qquad G_Y(s) = e^{\lambda\cdot(s-1)} \qquad (6.1)$$

$$= e^{\lambda(ps-p)}$$

$$= e^{\lambda p(s-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad W \sim \mathrm{Poi}(\lambda p)$$

ii) $Y \sim \text{Géom}_0(q)$

$$G_W(s) = \frac{q}{1-(1-q)\cdot(1-p+ps)} = \frac{q}{1-(1-p+ps-q+pq-pqs)}$$

$$= \frac{q}{p+q-pq-(p-pq)\cdot s} = \frac{q/(p+q-pq)}{1-\dfrac{p-pq}{p+q-pq}\, s} = \frac{q/(p+q-pq)}{1-\left(1-\dfrac{q}{p+q-pq}\right)\cdot s}$$

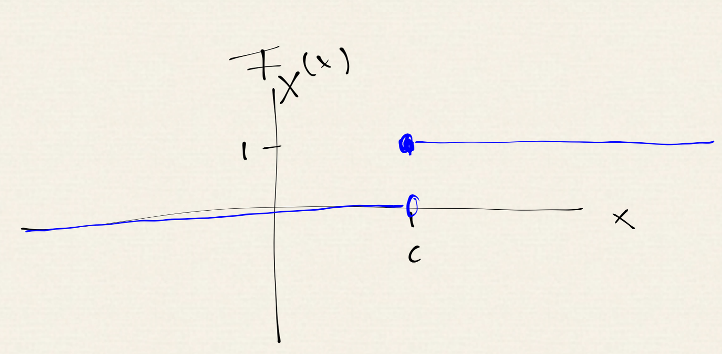
Donc $W \sim \text{Géom}_0\left(\dfrac{q}{p+q-pq}\right)$.

<u>À $10^h 10$ : 7.1</u>

<u>Exo 7.1</u> : $X$ v.a. $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

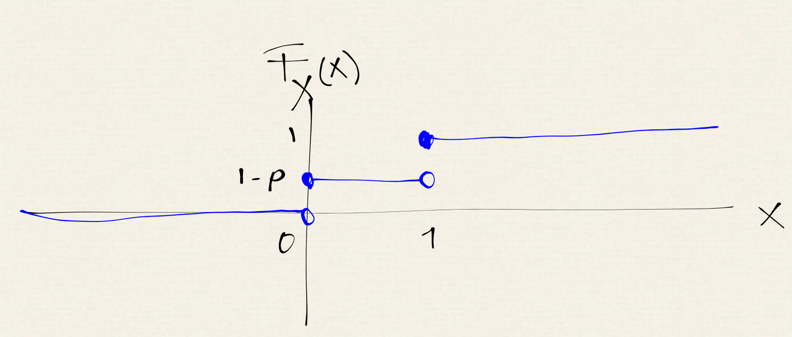
a) Constante $c \in \mathbb{R}$. $\mathbb{P}(X=c)=1$

Donc $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$




b) $X \sim \mathrm{Bern}(p)$

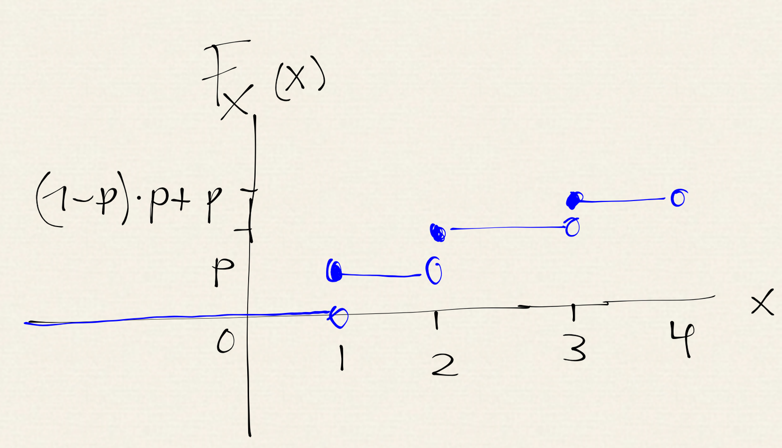
$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$




c) $X \sim \text{Géom}(p)$

partie entière de x

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ k \leq x}} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} (1-p)^{k-1} p$



Exo 7.2 : la prochaine fois.